УДК 314.45.12

Азаренко Е. В., докт. техн. наук, проф.
Дивизинюк М. М., докт. техн. наук, проф. (Тел.: +380 67 692 88 02. E-mail: divizinyuk@ukr.net)
Чернявская С. А., канд. физ.-мат. наук, доцент
(Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПИСАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ СКОРОСТИ ЗВУКА ЛОКАЛЬНОГО РАЙОНА МОРЯ

Азаренко О. В., Дівізінюк М. М., Чернявська С. О. Математична модель опису стаціонарного поля швидкості звуку локального району моря. Дослідження стосується північно-західної фронтальної зони Чорного моря як локального району. Показано, що поле швидкості звуку в локальному районі може бути представлено в аналітичному просторі Шварца конгломератом Фур'є-образів дельта функції Дірака, гребенчатой функції, інтегралом Коші і перетворенням Гільберта.

***Ключевые слова*: поле** скорости звука , пространство Шварца, дельта функция Дирака, гребенчатая функция, интеграл Коши, преобразование Гильберта

Азаренко Е. В., Дивизинюк М. М., Чернявская С. А. Математическая модель описания стационарного поля скорости звука локального района моря. Исследование касается северо-западной фронтальной зоны Черного моря как локального района. Показано, что поле скорости звука в локальном районе может быть представлено в аналитическом пространстве Шварца конгломератом Фурье-образов дельта функции Дирака, гребенчатой функции, интегралом Коши и преобразованием Гильберта.
***Ключевые слова*:** поле скорости звука, пространство Шварца, дельта функция Дирака, гребенчатая функция, интеграл Коши, преобразование Гильберта

Azarenko O. V., Diviziniuk M. M., Chernyavs'ka S. O. Mathematical models of sound velocity stationary field description in local sea area. Research touches the north-western frontal area of the Black sea as local area. It is shown that the sound speed field in the local area can be represented in the analytic Schwartz space by the conglomerate of Dirac delta function Fourier-transforms, comb function, Cauchy integral and Hilbert transform.
***Keywords*:** sound speed field**,** Schwartz space, Dirac delta function, comb function, Cauchy integral, Hilbert transform

Введение. Огромный класс прикладных задач, связанных с контролем водного пространства в интересах добычи полезных ископаемых с морского дна, поддержания надлежащего экологического и природоохранного режима водной среды, использования биоресурсов и многие другие решаются с использованием гидроакустических средств различного назначения [1]. Для государства Украина объектом такого контроля является северо-западная часть Черного моря, где ведется и рыбий промысел и разработка месторождений нефти и газа [2]. Здесь с точки зрения экстремальных физико-географических факторов аномальным районом является северо-западная фронтальная зона, которая существует практически в течение всего года [3]. Эффективное использование гидроакустических средств в целом и северо-западной части Черного моря в частности, зависит от знания условий распространения звука, которое в конечном итоге определяется структурой поля скорости звука в районе исследований [4]. Известны работы [5, 6] в которых рассматриваются методы вычислительной томографии для описания сейсмологических структур, определяющих распространение звука в земной коре.

Постановка цели и задач научного исследования. Целью данной работы является разработка математической модели описания стационарного поля скорости звука северо-западной фронтальной зоны Черного моря (локального района моря). Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи. Во-первых, проанализировать свойства аналитического пространства Шварца. Во-вторых, систематизировать математическую модель на основании Фурье-образов некоторых функций.

Характеристика пространства Шварца. Рассмотрим линейное пространство Шварца $\Im\left(\mathbb{R}^n\right)$, или $\Im$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций $f \in C^\infty$ (C^∞ – бесконечно дифференцируемые функции), определенных на $\mathbb{R}^n$ (множество вещественных чисел), для которых норма

$$\left|f\right|_{k,l} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^k D^l f\left(x\right)\right|$$

конечна при любых мультииндексах $k,\ l \in \mathbb{Z}_+^n$, ($\mathbb{Z}_+^n$ – набор целых неотрицательных чисел). D^l – произвольный дифференциальный оператор.

Для всякой функции $f \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ (L_1 – участок пространства) определяется преобразование Фурье $\hat{f}$ и обратное преобразование Фурье $\tilde{f}$, которые задаются формулами:

$$\hat{f}\left(\xi\right)=\left(2\pi\right)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f\left(x\right)dx, \tag{1}$$

$$\tilde{f}\left(\xi\right)=\left(2\pi\right)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f\left(x\right)dx. \tag{2}$$

При этом на множестве $\Im\left(\mathbb{R}^n\right)$ справедливы формулы обращения для преобразования Фурье, т.е.

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f,\ f \in \Im, \tag{3}$$

а именно, эти преобразования отображают взаимно однозначно линейно и непрерывно пространство $\Im$ в себя. Если f имеет компактный носитель, то f допускает аналитическое продолжение на C^n (C^n – n раз непрерывно дифференцируемые функции).

Сформулируем ряд правил, которые будут выполняться в $L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$.

1. Правило растяжения. Пусть $f_r\left(x\right)=f\left(rx\right),\ r>0$. Тогда

$$\hat{f}_r\left(\xi\right)=r^{-n}\hat{f}\left(r^{-1}\xi\right).$$

2. Правило сдвига. Пусть $f_y(x)=f\left(x+y\right),\ y\in\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\hat{f}_y\left(x\right)=e^{ix\cdot y}\hat{f}\left(x\right).$$

3. Правило дифференцирования. Для $f \in \Im$ при $k \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left(D^k f\right)^\wedge = i^{|k|}\xi^k\hat{f}, \quad \left(x^k f\right)^\wedge = i^{|k|}D^k\hat{f}.$$

4. Правило свёртки. Для $f \in \Im$ и $g \in \Im$

$$\left(f*g\right)^\wedge = \left(2\pi\right)^{n/2}\hat{f}\hat{g}, \qquad \left(fg\right)^\wedge = \left(2\pi\right)^{-n/2}\hat{f}*\hat{g},$$

где $f*g$ называется сверткой двух функций f,g и задается формулой

$$\left(f*g\right)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(x-y\right)g\left(y\right)dy.$$

5. Правило Парсеваля.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{f}gdx.$$

Соответствующие правила для обратного преобразования Фурье следуют из равенства (3) $\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}}$.

Множество $\Im'$ – умеренных распределений (или медленно растущих) представляет собой пространство определенных на $\Im$ линейных функционалов T, непрерывных в следующем смысле: существуют такие $k, k', \; l \in \mathbb{Z}_+^n$, $c < \infty$, что

$$\left|Tf\right| \le c \sum_{k' \le k} \left|f\right|_{k',l}$$

для $f \in \Im$. Для элементов пространства $\Im'$ (называемых обобщенными функциями) справедливо правило дифференцирования

$$D^k Tf = \left(-1\right)^{|k|} TD^k f .$$

Если функция $g \in C^\infty$ и все ее производные имеют не более чем полиномиальный рост, то произведение $gT = Tg$ представляет собой обобщенную функцию

$$gT\left(f\right) = T\left(gf\right).$$

Для функций $g \in \Im$ операция свертки задается формулой

$$\left(g * T\right)\left(x\right) = Tg_x, \quad \text{где} \quad g_x\left(y\right) = g\left(x - y\right).$$

Рассмотрим измеримую на $\mathbb{R}^n$ функцию g, для которой при некотором q справедливо неравенство

$$\int \left|g\left(x\right)\right| \left(1 + |x|\right)^q dx < \infty ,$$

тогда можно ввести обобщенную функцию T_g вида

$$T_g f = \int_{\mathbb{R}^n} gf dx . \qquad \textbf{(4)}$$

Будем говорить, что T_g соответствует функции g. В результате интегрирования в равенстве (4) по частям получим

$$D^k T_g = T_{D^k g} ,$$

если $D^k g$ удовлетворяет тем же ограничениям скорости роста, что и g. Это равенство позволяет отождествлять функции T_g и g, и писать g вместо T_g.

Продолжим преобразование Фурье на $\Im'$ по формуле (2), тогда

$$\hat{T} f = T\hat{f} , \qquad \textbf{(5)}$$

и аналогично продолжим $\tilde{T}$. Используя правило 3 $\hat{T} \in \Im'$, если $T \in \Im'$ и при $g \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$, в силу правила 5, получим

$$\hat{T}_g f = T_g \hat{f} = \int g\hat{f} dx = \int \hat{g} f dx = T_{\hat{g}} f ,$$

откуда $\hat{T}_g = T_{\hat{g}}$, т.е. преобразование Фурье для обобщенной функции совпадает с преобразование Фурье на $L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$. Если функция f локально интегрируема и

$$f_r = \begin{cases} f \text{ при } |x| < r, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

то в пространстве $\Im'$ при $r \to \infty$ $\hat{f}_r$ поточечно сходится к $\hat{f}$.

Аналогично, если g – некоторая функция из $L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$, которая называется Фурье-образом функции g, то по теореме Планшереля $\hat{T}_g = T_{\hat{g}}$. Можно показать, что

$$\hat{g}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\lim_{r\to\infty}\int_{|x|\le r}e^{-ix\cdot\xi}g(x)\,dx,$$

где предел понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Правило 3, очевидно, обобщается для пространства $\mathfrak{I}'$. Правило 4 выполняется для $f\in\mathfrak{I}'$, и $g\in\mathfrak{I}$. Правило 5 в $L_2(\mathbb{R}^n)$, следовательно

$$(f,g)=(\hat{f},\hat{g}),$$

где $(\hat{f},\hat{g})$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$, т.е. преобразование Фурье на $L_2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой изометрию.

Математическая модель. Пусть $f\in L_2([-a,a]^n)$.

Рассмотрим полную ортогональную систему функций в $L_2([-a,a]^n)$

$$u_k(x)=(2a)^{-n/2}e^{i\pi x\cdot k/a},\; k\in\mathbb{Z}^n.$$

Тогда ряд

$$f=\sum_k (f,u_k)u_k, \tag{6}$$

будет сходящимся в $L_2([-a,a]^n)$, где (f,u_k) – скалярное произведение в этом пространстве. Выражение (6) представляет собой ряд Фурье с коэффициентами Фурье $\hat{f}_k$ функции f.

$$f(x)=\sum_k \hat{f}_k\cdot e^{i\pi x\cdot k/a},\quad \hat{f}_k=(2a)^{-n}\int_{[-a,a]^n}f(x)e^{-i\pi x\cdot k/a}dx,$$

Если $f=0$ вне $[-a,a]^n$, то функция f интегрируема на всей прямой и

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2}a^{-n}\sum_k \hat{f}\left(\frac{\pi}{a}k\right)\cdot e^{i\pi x\cdot k/a},$$

откуда при $g=0$ вне $[-a,a]^n$ следует равенство Парсеваля

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n}\sum_k \hat{f}\left(\frac{\pi}{a}k\right)\cdot\bar{\hat{g}}\left(\frac{\pi}{a}k\right).$$

Рассмотрим примеры нахождение Фурье-образов некоторых обобщенных функций специального вида.

1) С преобразованием Фурье тесно связано понятие δ-функции Дирака, формально определяемую соотношением:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x-a)f(x)\,dx=f(a)$$

или

$$\delta_x f=f(x),\;\delta=\delta_0.$$

Для нее согласно формуле (1) преобразования Фурье и правила 5 имеем

$$\hat{\delta}_x f=\delta_x\hat{f}=\hat{f}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(\xi)\,d\xi,$$

или

$$\hat{\delta}_x(\xi)=(2\pi)^{-n/2}e^{-ix\cdot\xi}. \tag{7}$$

Применив к (7) формулу обратного преобразования Фурье (2), получим для δ -функции представление

$$\delta(y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi}d\xi\ ,$$

которое, очевидно не имеет смысла, так как экспонента в пространстве $\mathbb{R}^n$ не интегрируема.

Однако если рассмотреть для $b>0$ функцию

$$\delta^b(y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\xi|<b} e^{iy\cdot\xi}d\xi\ ,$$

то для $f\in\mathfrak{I}$

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\delta^b(y)f(y)dy=f(0),$$

т.е. δ^b поточечно сходится к δ в $\mathfrak{I}'$. Следовательно, δ^b аппроксимирует δ -функцию.

Тогда, при $l=0$ получим

$$\delta^b(y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_0^b\sigma^{n-1}\int\limits_{S^{n-1}}e^{i\sigma y\cdot\theta}d\theta d\sigma=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}|y|^{(2-n)/2}\int\limits_0^b\sigma^{n/2}J_{n/2-1}(\sigma|y|)d\sigma=(2\pi)^{-n/2}b^n\frac{J_{n/2}(b|y|)}{(b|y|)^{n/2}},$$

где $J_{n/2-1}$ – функция Бесселя.

2) Теперь найдем Фурье-образ обобщенной гребенчатой функции (ряда, состоящего из бесконечного числа δ -функций, сдвинутых относительно друг друга на равные расстояния)

$$\text{Ш}_h=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\delta_{hk},\ h>0,$$

которая является симметричной относительно преобразования Фурье.

Для этого рассмотрим периодическую функцию

$$g(\xi)=\sum_l\hat{f}\left(\xi-\frac{2\pi}{h}l\right) \tag{8}$$

и разложим ее в ряд Фурье на $\left[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right]^n$. Имеем

$$g(\xi)=\sum_l\hat{g}_k e^{-ih\xi\cdot k}\ ,$$

где коэффициенты Фурье

$$\hat{g}_k=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n}\int\limits_{\left[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right]^n}g(\xi)e^{ih\xi\cdot k}d\xi=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n}\sum_l\int\limits_{\left[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right]^n}\hat{f}\left(\xi-\frac{2\pi}{h}l\right)e^{ih\xi\cdot k}d\xi=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ih\xi\cdot k}d\xi=(2\pi)^{-n/2}h^n f(hk).$$

Сравним последнее разложение функции g с разложением (8), зависящих от f и для $f\in\mathfrak{I}'$ получим

$$\sum_l\hat{f}\left(\xi-\frac{2\pi}{h}l\right)=(2\pi)^{-n/2}h^n\sum_k f(hk)e^{-ih\xi\cdot k}\ . \tag{9}$$

При $\xi = 0$ формула (9) представляет собой формулу Пуассона

$$\hat{\text{Ш}}_{2\pi/h} = (2\pi)^{-n/2} h^n \text{Ш}_h,$$

которая представима в виде

$$\int f(x)\,dx = h^n \sum_k f(hk) - (2\pi)^{n/2} \sum_{l\neq 0} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{h} l\right).$$

Это выражение можно интерпретировать как представление погрешности квадратурной формулы трапеции. Аналогичная формула для периодической функции с периодом a имеет вид

$$\int\limits_{[0,a]^n} f(x)\,dx = h^n \sum_{0\le k<p} f(hk) - a^n \sum_{l\neq 0} c_l, \quad h = \frac{a}{p},$$

где c_l – коэффициенты Фурье функции f на $[0,a]$, а ограничения на k выполняются покомпонентно.

Теперь пусть g – произвольная локально интегрируемая функция с периодом $2a$. Тогда $g \in \mathfrak{I}'$. Найдем разложение коэффициентов Фурье $\hat{g}_k$ функции g.

Для этого рассмотрим значение обобщенной функции $\hat{T}_g$ для $g \in \mathfrak{I}$. Заменив функцию g ее разложением в ряд Фурье, получим согласно (5)

$$\hat{T}_g f = T_g \hat{f} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\hat{f}dx = \sum_k \hat{g}_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\pi x\cdot k/a} \hat{f}(x)\,dx = (2\pi)^{n/2} \sum_k \hat{g}_k f\left(\frac{\pi}{a}k\right).$$

Таким образом,

$$\hat{g} = (2\pi)^{n/2} \sum_k \hat{g}_k \delta_{\pi k/a}.$$

3) Главное значение Коши интеграла

$$Tf = \int \frac{f(x)}{x} dx,$$

который для $f \in \mathfrak{I}$, можно определить как любой из обычных интегралов

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{h\to 0} \int\limits_{|x|>h} \frac{f(x)}{x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} dx.$$

Используя второе определение, получим для Фурье-образа обобщенной функции T

$$\hat{T}f = T\hat{f} = \lim_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(-x)}{2x} dx = \lim_{a\to\infty} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}}{2x} f(\xi)\,d\xi dx =$$

$$= \lim_{a\to\infty} (-i)(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x\xi)}{x} f(\xi)\,d\xi dx = \lim_{a\to\infty} (-i)(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin(x\xi)}{x} dx.$$

Внутренний интеграл ограничен равномерно по a как функция от ξ и при $a \to \infty$ поточечно сходится к функции $\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)$ для $\xi \neq 0$. Перейдя к пределу при $a \to \infty$, получим:

$$\hat{T}f = (-i)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\xi) f(\xi)\,d\xi,$$

$$\hat{T}(\xi) = (-i)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \mathrm{sgn}(\xi).$$

4) Преобразование Гильберта H задается формулой $\mathrm{H}f = \frac{1}{\pi} T * f$, т.е.

$$\mathrm{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy .$$

В силу правила 4

$$(\mathrm{H}f)\hat{}\,(\xi) = \frac{1}{\pi}(T * f)\hat{}\,(\xi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \left(\hat{T}\hat{f}\right)(\xi) = \frac{sgn(\xi)}{i} \hat{f}(\xi) .$$

В конечном результате получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^b(y) = (2\pi)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b|y|)}{(b|y|)^{n/2}} \\
&\hat{T}_g f = (2\pi)^{n/2} \sum_k \hat{g}_k f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \\
&\hat{T}(\xi) = (-i)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sgn}(\xi) \\
&(\mathrm{H}f)\hat{}\,(\xi) = \frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{i} \hat{f}(\xi)
\end{aligned}\right\} .$$

Вывод. Получена математическая модель стационарного поля скорости звука Северо-западной фронтальной зоны Черного моря, которое представлено в аналитическом пространстве Шварца конгломератом Фурье-образов дельта функции Дирака, гребенчатой функции, интегралом Коши и преобразованием Гильберта.

Литература

1. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Маципура. – Киев : Интерсервис, 2013. – 572 с.

2. Дивизинюк М. М. Акустические поля Черного моря / М. М. Дивизинюк. – Севастополь : Гос. океанариум, 1998. – 352 с.

3. Дивизинюк М. М. Акустические поля Черноморских фронтах и постоянных течениях / М. М. Дивизинюк. – Севастополь : Гос. океанариум, 1998. – 68 с.

4. Азаренко Е. В. Акустическое обнаружение объектов в водной среде / Е. В. Азаренко. – Севастополь : Гос. океанариум, 2003. – 71 с.

5. Андерсон Т. У. Введение в многомерный статистический анализ / Т. У. Андерсон. – Москва : Физматгиз, 1963. – 526 с.

6. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – Москва : Мир, 1967. – 620 с.

Дата надходження в редакцію: 15.08.2014 р. Рецензент: д.т.н., проф. С. В. Толюпа