УДК 004.65

Барабаш О. В., Гайдур Г. І., Дахно Н. Б., Шевченко Г. В.
Державний університет телекомунікацій, м. Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕРЕЖЕВОЇ РІВНОВАГИ ДЛЯ ВИПАДКУ КОНКУРЕНТНОЇ БОРОТЬБИ В УМОВАХ НЕПОВНОЇ ІНФОРМОВАНОСТІ

Формулюється оптимізаційна задача, щодо кількісних, якісних і часових характеристик, яка виникає перед особою, що приймає рішення і реалізує вибір альтернатив, базуючись на оцінюванні множини цілей, котрі часто є непорівнянними і суперечливими. Представлений точний алгоритм та схему обчислення для варіаційної нерівності спеціального вигляду, який дозволяє визначити рівноважний бюджет і явні витрати для структури абстрактної мережі, що лежить в основі даної задачі. Наведений числовий приклад.

Ключові слова: *граничний відгук, максимізація відгуку, оптимальні умови Кюна-Такера, рівновага Неша*

Barabash O. V., Haidur H. I., Dakhno N. B., Shevchenko H. V.
State University of Telecommunications, Kyiv

MATHEMATICAL MODEL OF THE NETWORK EQUILIBRIUM FOR THE CASE OF COMPETITION IN THE CONDITIONS OF INCOMPLETE AWARENESS

In this paper a network equilibrium framework for the modeling and analysis of competitive firms engaged in Internet advertising among multiple websites was developed. The optimization problem is formulated in relation to the quantitative, qualitative and temporal characteristics that arises before the decision maker (ODA) and implements the choice of alternatives, based on the evaluation of a set of goals that are often incompatible and contradictory. A scheme of equilibrium of the network was developed for modeling and analysis of the behavior of competing firms that advertise on many websites. A precise algorithm for the variational inequality of a special form is presented, which allows us to determine the equilibrium budget and the explicit expenses of advertising and shows that the solution of variational inequality satisfies the main equilibrium conditions for the model under consideration. The computation scheme in which the structure of the abstract network, which forms the basis of this task, is used. A numerical example is given.

Keywords*: limit response, maximization of response, optimal Cune-Tucker conditions, Nash equilibrium*

Барабаш О. В., Гайдур Г. И., Дахно Н. Б., Шевченко Г. В.
Государственный университет телекоммуникаций, м. Киев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТЕВОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНКУРЕНТНОЙ БОРЬБЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Формулируется оптимизационная задача относительно количественных, качественных и временных характеристик которая возникает перед лицом, принимающим решение (ОПР) и реализующим выбор альтернатив, базируясь на оценивании множественного числа целей, которые часто являются несравнимыми и противоречивыми. Представлен точный алгоритм и схема вычисления для вариационного неравенства специального вида, которые позволяют определить равновесный бюджет и явные расходы для структуры абстрактной сети, которая лежит в основе данной задачи. Приведен числовой пример.

Ключевые слова: *предельный отзыв, максимизация отзыва, оптимальные условия Кюна-такера, равновесие Нэша*

Вступ. Цілісний математичний опис прийняття рішення щодо розроблення рекламного бюджету можна розподілити на дві великі підсистеми: визначення загального обсягу коштів, що асигнуються на рекламу та розподіл цих коштів за статтями витрат. Між цими підсистемами існує обмін різною за своєю природою інформацією. Але при цьому деякі елементи інформації можна описати кількісними методами, що ґрунтуються на диференціальних рівняннях у частинних похідних, або алгебраїчних регресійних співвідношеннях.

Проте не завжди вдається отримати точну цифру, оскільки, як правило, немає повної картини взаємозв'язку між контактами споживача з рекламою і його діями у відповідь. Отже, кількісні оцінки розмиваються і їм у відповідність ставлять деякі нечіткі підмножини. Аналітичний підхід базується на пошуку функціональної залежності між бюджетом і рівнем досяжності мети. Неаналітичний підхід заснований на логіці здорового глузду, досвіді людини, що дає змогу відкидати неправильні розв'язки, які суперечать умовам задачі.

В статті сформульовано оптимізаційну задачу щодо кількісних, якісних і часових характеристик, яка виникає перед особою, що приймає рішення (ОПР) і реалізує вибір альтернатив, базуючись на оцінюванні множини цілей, котрі часто є непорівнянними і суперечливими. Розроблення і прийняття рішень через свою складність можливо лише на базі людино-машинних процедур. Людині відведено роль особи, що формує задачу, аналізує результати і приймає остаточне рішення.

Шляхом аналізу отриманої задачі також встановлюється, що в рівновазі граничні відгуки на всіх носіях дорівнюють граничному відгуку на додаткову одиницю витрат, а бюджет фірми на інтернет-рекламу є зростаючою функцією від граничного відгуку.

Постановка задачі в загальному вигляді. Припускається, що одна і та сама ІТ-послуга, може пропонуватись N фірмами в усіх середовищах. Фірми планують показники своєї діяльності і прогнозують дії конкурента. Кожна сторона має свою цільову функцію. Суб'єкти діють незалежно і жодна сторона не знає ані цільової функції, ані параметрів інших сторін. При цьому, для одних цілей оптимальні розв'язки відповідають мінімальному значенню відповідного критерію, а для інших – максимальному. Крім того, стратегії суб'єктів протидіють одна одній.

Отже, ситуація залежить не тільки від зовнішніх умов, але і від стратегії сторін. Тому дії сторін зумовлюють потребу зміни нетільки параметрів, але і цілей у процесі розвитку ситуації.

Для фірми *n; n*= 1,2,...*N*: нехай f_{ni} означає витрати на інтернет-рекламу і нехай f_{nd} витрати на рекламу в інших засобах. Також пропонується модель мережевої рівноваги в сенсі Неша, яка враховує вибір таких параметрів діяльності фірми, щоб у найгіршій ситуації мати максимально можливі для себе значення цільової функції. Згрупуємо f_{ni} та $f_{nd}, n = 1,2,...N$ відповідно в вектори f_i, f_d . Всі вектори вважаються векторами-стовпцями.

Нехай $r_{ni}\left(f_i\right)$ та $r_{nd}\left(f_d\right)$ позначають відгук споживачів на витрати f_i та f_d відповідно. Припускається, що відгук споживачів на витрати на інтернет-рекламу залежить лише від витрат, які було зроблено саме на дане середовище. Це припущення менш строге, ніж в інших аналогічних дослідженнях.

Можна знехтувати крос-медійним ефектом, але потрібно врахувати крос-фірмовий ефект, оскільки ступінь ризику при конкуренції залежить, як від ймовірності вибору супротивником певної стратегії, так і від ймовірності розпізнавання цієї стратегії. Рівень ризику визначає розмір збитку кожної із сторін. В той же час було враховано основні механізми маркетингу [1, 2].

Вважається, що $r\left(f_j\right), \cdot j = i, \cdot d$ є зростаючою, диференційованою та угнутою функцією від f_j. Припускається, що кожна фірма *n* має загальний рекламний бюджет C_n.

Задача оптимального розподілу бюджету, з якою зустрічається фірма n, при припущенні, що вона бажає максимізувати споживчій відгук через всі середовища, в межах бюджету, можна висловити, як наступну багатокритеріальну оптимізаційну задачу:

$$\left\{\left\{r_{ni}(f_i) + r_{nd}\left(f_d\right)\right\}\right\} \xrightarrow{f_{ni}, f_{nd}} \max, \tag{1}$$

за умов

$$f_{ni} + f_{nd} \le C_n, \tag{2}$$

$$f_{ni} \ge 0, \cdot f_{nd} \ge 0 \ . \tag{3}$$

Аналіз останніх публікацій. Задача мережевої рівноваги для випадку рівноваги транспортної мережі з еластичним попитом, досліджено в статтях [3, 4]. Для розв'язання використовувались методи теорії варіаційних нерівностей в асиметричному випадку. В цих випадках умови рівноваги не можна переформулювати як умови Кюна-Такера і пов'язаною з ними оптимізаційною задачею [5]. Задачі рівноваги мережі, включаючи задачі рівноваги транспортної мережі, розглядались в роботі [5, 6].

Задачі теорії ігор, як було доведено в статті [7], а звідси і олігопольні задачі допускають формалізацію умов рівноваги в сенсі Неша через варіаційні нерівності. Формалізацію і розв'язання подібних задач виконують за схемою, представленою в роботі [8] лише з відмінністю, що замість двох, оптимізують *k* функцій [9]. Конкуренція з асиметричною інформацією є предметом інших досліджень [10, 11].

На практиці сторони не тільки не повідомляють одна одній які-небудь достовірні відомості про свої дії, але й свідомо дезінформують як щодо цілей, так певних параметрів. Під час розкриття невизначеності дій конкуруючих фірм постає задача оцінювання ступеня і рівня ризику. Таким чином, функції відгуку можуть бути побудовані на асиметричній інформації. Зацікавленість в дослідженні цих тенденцій носить як теоретичний, так і практичний характер [12, 13].

Метою статті є оптимізація визначення величини та розподілу рекламного бюджету фірми в умовах конкуренції, неповної інформованості і невизначеності цілей. Як наслідок вирішується задача вимірювання ефективності реклами на традиційних носіях, оскільки невизначеним є питання про зв'язок між розподілом бюджету на розміщення реклами на традиційних носіях та відгуком на нього. Отже, в силу невизначеності і неповноти інформованості важко визначити кількість інвестицій в традиційну рекламу і прибуток від неї. У випадку розміщення реклами в інтернеті, навпаки, можна точно встановити залежність між інвестиціями і відгуком.

Таким чином задача багатокритеріальної оптимізації з суперечливими цілями (мінімізація витрат і максимізація відгуку) вирішується побудовою моделі, за допомогою якої можна зосередитись на знаходженні рівноваги (яка є оптимальною) інтернет-витрат, і тоді, та частина бюджету, яка залишається, буде оптимальною сумою, яку слід розмістити на традиційних носіях.

Оптимізаційна задача визначення величини та розподілу рекламного бюджету. Припускається, що на даний момент *N* фірм конкурує на *M* сайтах і кожна з них намагається максимізувати свій персональний відгук [1]. Нехай, f_{mn} m=1, 2,...,M; n=1,2,...,N означає витрати фірми *n* на сайті m, де $f_{mn} \ge 0$. Витрати на інтернет-рекламу f_{mn} були згруповані в невід'ємні вектори $f \in R_{+}^{MN}$. Для позначення граничного відгуку на дії фірми щодо онлайн-реклами використовується η_n .

Рекламний бюджет фірми n на онлайн-рекламу b_n є зростаючою функцією від η_n і може бути записаним наступним чином:

$$b_n = b_n(\eta_n),\ n = 1, 2, ..., N. \tag{4}$$

Якщо позначити відгук споживачів, який отримує фірма n від сайту m через r_{mn}, тоді природньо припустити, що

$$r_{mn} = r_{mn}(f), \tag{5}$$

яка є зростаючою і угнутою функцією від f, і тоді

$$r_{mn} = r_{mn}(f) = \sum_{m=1}^{M} r_{mn}(f) \tag{6}$$

є загальним відгуком в інтернет-середовищі для фірми. Функція r_n також має бути зростаючою і угнутою функцією від f [5, 6].

Тепер робиться припущення, що кожна із фірм намагається максимізувати онлайн-відгук в залежності від обмежень щодо онлайн-бюджету. Таким чином, фірма n, n=1,...,N в умовах конкуренції зустрічається з наступною оптимізаційною проблемою.

$$r_n(f) \xrightarrow{f_{1n},\dots f_{Mn}} \max, \tag{7}$$

за умов

$$\sum_m f_{mn} \le b_n(\eta_n), \tag{8}$$

$$f_{mn} \ge 0, m = 1, 2, ..., M. \tag{9}$$

Тут припускається, що η_n необов'язкові дані. Якщо η_n дано, фірма повинна пов'язати $b_n(\eta_n)$, онлайн-реклами з задачею (7)-(9), яку потрібно розв'язати, щоб визначити оптимальне $f_{mn}, m = 1, 2, ...M$. Маркетингова дія покращується і η_n збільшується, а в результаті збільшується бюджет $b_n(\eta_n)$. В рівновазі, проте, η_n більше не є необов'язковим значенням, а визначається розміщенням f. Формально, це можна обгрунтувати за допомогою наступного твердження, в якому також припускається, що конкуренція між фірмами в сенсі Неша, виражається в не-кооперативній грі [9, 10].

Твердження 1 (рівновага Неша при інтернет-рекламуванні). Вектор $f^* = \{f^*_{mn}, m = 1,.., M; n = 1,..., N\}$ є рівноважним розподіленням бюджету для всіх фірм на всіх вебсайтах в сенсі Неша тоді і тільки тоді, коли він задовольняє наступним рівнянням і нерівностям для всіх фірм n і всіх сайтів m [1]:

$$\frac{\partial r_n(f^*)}{\partial f_{mn}} \begin{cases} = \lambda^*_n, f^*_{mn} > 0, \\ \le \lambda^*_n, f^*_{mn} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\lambda^*_n \begin{cases} = 0, f^*_{ns} > 0, \\ \ge 0, f^*_{ns} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\sum_{m=1}^{M} f^*_{mn} + f^*_{ns} = b_n(\lambda^*_n) \ . \tag{12}$$

Таким чином, в рівновазі граничні відгуки на всіх вебсайтах дорівнюють граничному відгуку на додаткову одиницю витрат цієї фірми на онлайн-рекламу, якщо використовується цей вебсайт.

Для розробки методики визначення оптимальної величини та оптимального розміщення рекламного бюджету розглянемо таку модель.

Нехай є граф G, в якому вершинами є N фірм та M сайтів. В графі додатково введено вершину з номером 0 (вершина виходу), яка відображає віртуальну фірму, що має сумарний рекламний бюджет мережі:

$$B = \sum_{n=1}^{N} b_n.$$

Вершини з номерами 1, 2,…, N – вершини виходу відображають фірми з рекламним бюджетом b_n.

Вершини, що позначають сайти, позначаються цифрами m=1, 2,...,M. Ребра графу поєднують кожну фірму (є вершинами виходу) з кожним сайтом (вершинами входу) та мають вагу f_{mn} – потік на шляху mn, де f_{mn} – витрати n-ої фірми на рекламування на m-му сайті. Невикористані частини бюджету f_{ns}: $n = 1,2,...,N$ для кожної фірми представлені у вигляді петель.

Вектор потоку витрат задається як $f = (f_{11}, f_{12,...,} f_{MN})^T$, який є вектором у $R^{MN}{}_{+}$. Потоки f_{ns}: $n = 1,2,...,N$ представляють невід'ємні потоки на відповідних петлях і відповідають резервній частині бюджету [2].

Нехай тепер $u_{mn}(f)$ означає граничний прибуток від мережевого потоку f на шляху mn, який визначається таким чином:

$$u_{mn}(f) = \frac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}}; m = 1, 2, \ldots, M; n = 1, 2, \ldots, N,$$

при цьому всі граничні прибутки на хибному шляху вважаються рівними нулю.

Еластичність попиту представлена $b_n(.)$ для $n = 1,2,...,N$. Тоді умови рівноваги (10)-(12) мають наступну інтерпретацію для рівноваги мережі: тільки ті шляхи, які забезпечують максимальний граничний прибуток, тобто, максимальні граничні відгуки використовуються (мають додатній потік) в рівновазі.

Перед тим, як встановити варіаційні нерівності для умов рівноваги Неша (10)-(12) вводяться наступні позначення. Оскільки бюджет на онлайн рекламу фірми $b_n(\lambda_n)$ є зростаючою функцією від граничного відгуку λ_n, то $\lambda_n = \lambda_n(b_n)$ є оберненою функцією $b_n(.)$ і є також зростаючою функцією.

Тепер ми визначимо наступні вектори. Нехай

$$u(f) = \left(u_{mn}(f);\ m = 1,2,...,M;\ n = 1,2,...,N\right),$$

$$b = (b_n; n = 1, 2,..., N), \lambda(b) = (\lambda_n(b_n); n = 1, 2, ..., N).$$

Тоді $u(f) \in R^{MN}, b \in R^n{}_+$ і $\lambda(b) \in R^n$. Умови рівноваги (10)-(12) можуть бути записані у еквівалентному вигляді: для всіх фірм $n = 1, 2, ..., N$ і для всіх вебсайтів $m = 1,2,...,M$:

$$\frac{\partial r_n(f^*)}{\partial f_{mn}} \begin{cases} = \lambda_n\left(b_n^*\right), f_{mn}^* > 0, \\ \le \lambda_n\left(b_n^*\right), f_{mn}^* = 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\lambda_n\left(b_n^*\right) \begin{cases} = 0, f_{ns}^* > 0, \\ \ge 0, f_{ns}^* = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\sum_{m=1}^{M} f_{mn}^* + f_{ns}^* = b_n(\lambda_n^*). \tag{15}$$

Тепер можна стверджувати наступне.

Твердження 2. (Формулювання у вигляді варіаційних нерівностей рівноваги Неша при інтернет-рекламуванні.) Вектор $\left(f^*, b^*\right) \in K^1$ є рівноважним згідно умов (13)-(15), еквівалентних (10)-(12) тоді і тільки тоді, коли він є розв'язком варіаційної задачі:

$$\left\langle u\left(f^*\right), f - f^*\right\rangle, \left\langle -\lambda\left(b^*\right), b - b^*\right\rangle \leq 0, \cdot \forall (f,b) \epsilon K^1,$$

$$K^1 \equiv \left\{\left(f,b\right) \middle| \left(f,b\right) \in R_+^{MN+N}, \quad \sum_{m=1}^{M} f_{mn} + f_{ns} = b_n, f_{ns} \geq 0; \quad n = 1,2,\ldots,N\right\}, \tag{16}$$

де <·,·> означає внутрішній добуток у Евклідовому просторі потрібної розмірності.

Якщо (f^*, b^*) є розв'язком (10)-(12), тоді для $m =$ 1,2,...,M; n = 1,2,...,N:

$$u_{mn}\left(f^*\right) - \lambda_n\left(b_n^*\right) = 0, f_{mn}^* > 0, \tag{17}$$

$$u_{mn}\left(f^*\right) - \lambda_n\left(b_n^*\right) \leq 0, f_{mn}^* = 0, \tag{18}$$

$$-\lambda_n\left(b_n^*\right) = 0, f_{mn}^* > 0, \tag{19}$$

$$-\lambda_n\left(b_n^*\right) \leq 0, f_{mn}^* = 0, \tag{20}$$

$$\sum_{m=1}^{M} f_{mn}^* + f_{ns}^* = b_n. \tag{21}$$

Нерівності (17) і (18) означають, що для $\left(f,b\right) \in K^1$ виконуються наступні нерівності:

$$(u_{mn} n(f^*) - \lambda_n(b_n^*)) \times (f_{mn} - f_{mn}{}^*) \leq 0, \tag{22}$$

в свою чергу з (19) і (20) випливає, що

$$-\lambda_n\left(b_n^*\right) \times (f_{ns} - f_{ns}^*) \leq 0. \tag{23}$$

Взявши суму (22) по всіх m і n і (23) по всіх n і згрупувавши подібні, можна отримати:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(u_{mn}\left(f^*\right) \times \left(f_{mn} - f_{mn}^*\right) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\lambda_n\left(b_n^*\right)) \times (\left(f_{mn} - f_{mn}^*\right) + (f_{ns} - f_{ns}^*)) \leq 0, \quad (f,b) \in K^1. \tag{24}$$

Застосувавши тепер (15) та визначення множини K^1 можна скоротити (24) до

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}(u_{mn}\left(f^*\right) \times \left(f_{mn} - f_{mn}^*\right) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\lambda_n\left(b_n^*\right)) \times (b_n - b_n^*)) \leq 0, (f,b) \epsilon K^1. \tag{25}$$

Але варіаційна нерівність (15) є записом у векторному вигляді нерівності (25). І навпаки, якщо $\left(f^*, b^*\right)$ є розв'язком (16) для будь-яких $f^*_{ij} >$ 0, можна покласти $f_{mn} = f^*_{mn}$ для будь-яких $\left(m,n\right) \neq \left(i,j\right)$, $f_{ns} = f^*_{ns}$і$f_{ij} = f^*_{ij} + \delta$. Таким чином, $b_j = \sum_{m=1, m\neq i}^{M} f_{mj}^* + f_{js}^* + f_{ij}^* + \delta = b_j^* + \delta$, та $b_n = b_{n,}^*$ для будь-яких $n \neq j$. Нерівність (16) скорочується до вигляду:

$$u_{ij}\left(f^*\right)\delta - \lambda_j(b_j^*)\delta \leq 0. \tag{26}$$

Врахувавши, що оскільки δ може приймати додатнє, або від'ємне значення, то (25) еквівалентно (13). З іншого боку, для будь-яких $f^*_{ij} = 0$, використовується той же підхід, але δ має бути додатнім.

Отже, (25) знову еквівалентно (16).

Крім того, можна помітити, що (14) еквівалентно (26). Для будь-яких $f^*_{ks} > 0$,беремо $f_{ns} = f^*_{ns}$ для будь-яких $n \neq k$, $f_{mn} = f^*_{mn}$ для будь-яких m,n і $f_{ks} = f^*_{ks} + \delta$. Тоді підстановка в (23) скорочує його до вигляду: $-\lambda_j(b_j^*)\delta \leq 0$.

Врахувавши, що оскільки δ може приймати додатнє, або від'ємне значення, то записана вище нерівність являє собою першу умову (17). З іншого боку, якщо $f^*_{ns} = 0$, то δ має бути додатнім. і вищезазначена нерівність являє собою другу умову (18). Що і потрібно було довести.

Важливо зазначити, що множина K^1 є опуклою необмеженою множиною в математичному сенсі. Але з маркетингової точки зору, доцільно вважати цю множину опуклою, обмеженою компактною множиною, оскільки онлайн-бюджет фірми b_n менший, або дорівнює загальному рекламному бюджету фірми, який в свою чергу не може бути нескінченним (отже необмеженим).

Із визначення $\lambda_n(b_n)$ в (14) можна зробити висновок, що це зворотня функція від $b_n(\lambda_n)$, де λ_n є граничним відгуком, якого досягла фірма *n*. $b_n(\lambda_n)$ є зростаючою функцією від λ_n тоді і тільки тоді, коли $\lambda_n(b_n)$ є зростаючою функцією. Якщо $\lambda_n(.)$ є неперервною і диференційованою, то її сильна монотонність означає зростання $\lambda_n(.)$ одночасно із зростанням $b_n(\,.)$.

Алгоритм для обчислення рівноважного рекламного бюджету і розподілу бюджету. Представимо точний алгоритм для варіаційної нерівності спеціального вигляду, який дозволяє визначити рівноважний бюджет і явні витрати на рекламу і покажемо, що розв'язок варіаційної нерівності (16) можна наблизити послідовністю розв'язки відповідних варіаційних нерівностей спеціального вигляду. В алгоритмі використовується мережева структура задачі розміщення реклами в інтернеті.

Твердження 3. Нехай варіаційна нерівність (16) є квадратною з відокремлюваними змінними в сенсі для m=1,2,...,M; n = 1,2,...,N:

$$u_{mn}(f) = \frac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}} = a_{mn} f_{mn} + k_{mn} \;; \qquad \lambda_n(b_n) = \alpha_n b_n + \beta_n \;,$$

де $a_{mn} < 0,\ \alpha_{mn} > 0$ – для того, щоб забезпечити сильну монотонність $-u(f)$ та $\lambda(b)$;

$k_{mn} > 0$ – для того, щоб забезпечити зростання $r_n(f)$ на допустимій множині K^1 ;

$\beta_n \leq 0$ – для того, щоб гарантувати невід'ємність бюджету b_n для будь-яких невід'ємних границь.

Тоді рівноважний Інтернет-бюджет для кожного $n = 1,2,...,N$ та його розміщення можна розрахувати за наступним алгоритмом (рис. 1).

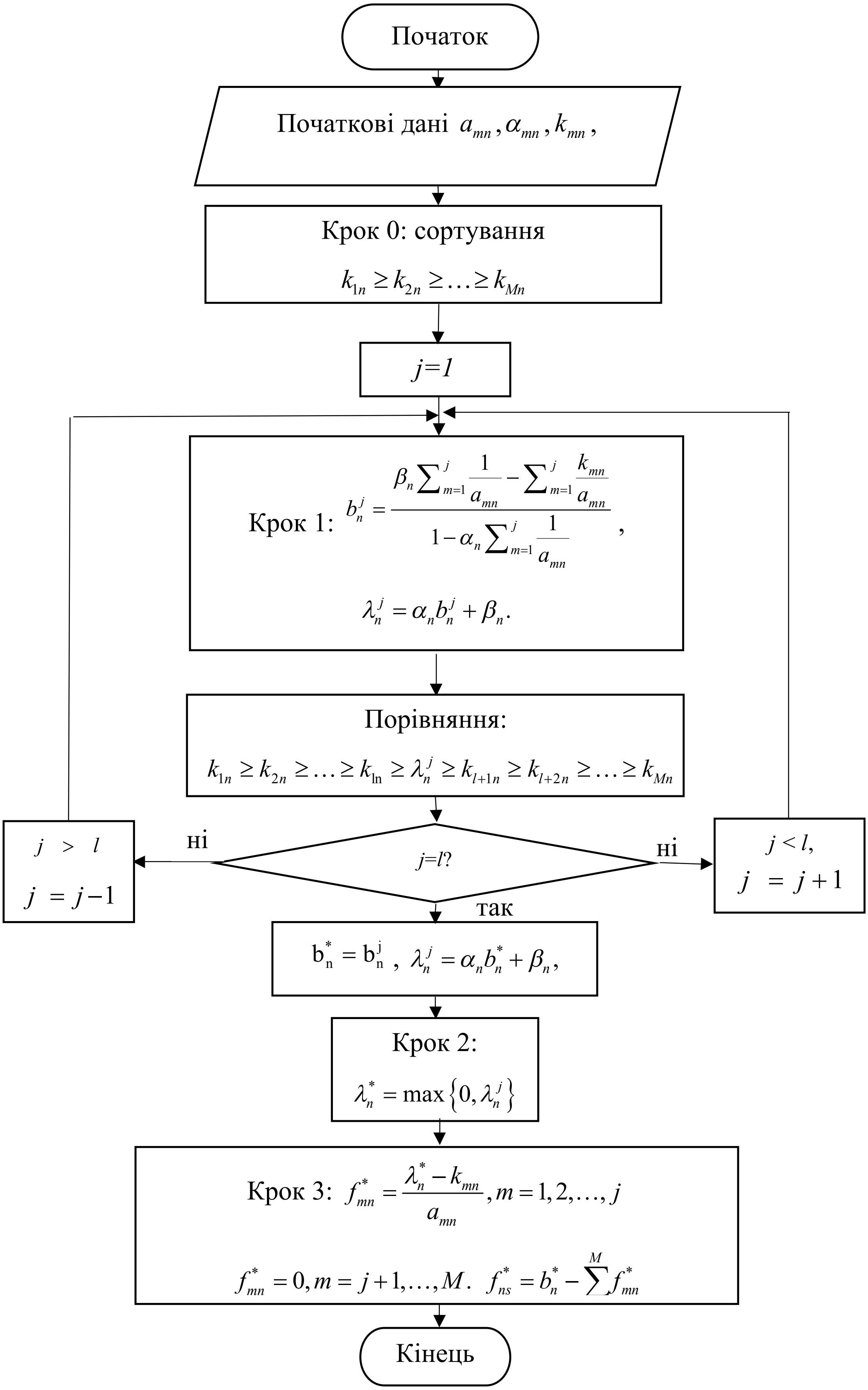

Рис.1. Методика визначення оптимальної величини та оптимального розміщення рекламного бюджету

Тепер буде наведено числовий приклад для ілюстрації застосування алгоритму точного обчислення, наведеного вище. Нехай є дві фірми конкуруючі на 3 веб-сайтах. Нехай функції відгуку (1000 одиниць) для онлайн-реклами

$$r_w = -\frac{2}{100000} f_w^2 + \frac{4}{100} f_w + 2 .$$

Вважається, що рекламний бюджет складає 900 од (1 одиниця – 1000 грн), для того, щоб бюджет компанії на онлайн-рекламу був оптимальним, потрібно щоб:

$$f_{nw} = f_{nw}^0 + 25000(\eta_{nw} - 0.008).$$

Функції $u_{mn}\left(f\right) = \dfrac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}} = a_{mn} f_{mn} + k_{mn}$ та $\lambda_n\left(b_n\right) = \alpha_n b_n + \beta_n$ матимуть вигляд:

$$u_{11}(f) = -5f_{11} + 90, \quad u_{21}(f) = -3f_{21} + 80, \quad u_{31}(f) = -f_{31} + 90,$$

$$u_{12}(f) = -2f_{12} + 45, \quad u_{22}(f) = -4f_{22} + 80, \quad u_{32}(f) = -2f_{32} + 100 ;$$

$$\lambda_1\left(b_1\right) = 8b_1 - 20, \quad \lambda_2\left(b_2\right) = 5b_2 - 10.$$

Застосувавши алгоритм точного встановлення рівноваги, наведений у Твердженні 3 та реалізувавши його за допомогою програми на мові Go до цього числового прикладу, можна отримати наступні розв’язки:

$$f_{11}^{\ *} = 2.0603, \; f_{21}^{\ *} = 0.1005, \; f_{31}^{\ *} = 10.3015, b_1^* = 12.4623, \quad \lambda^*{}_1 = 79.6985 \;;$$

$$f_{12}^{\ *} = 0.0000, \; f_{22}^{\ *} = 2.1052, \; f_{32}^{\ *} = 14.2105, \quad b_2^* = 16.3158, \quad \lambda^*{}_2 = 71.5790.$$

Умови (13)-(15), які еквівалентні (1)-(3), точно задовольняються цими розв’язками. Тобто отримано рівноважний розподіл бюджету.

Висновки

Запропоновано математичну модель мережевої рівноваги при інтернет-рекламуванні для випадку конкурентної боротьби при неповній інформованості щодо цілей та дій конкурентів, яка відрізняється додатковою множиною функцій і забезпечує можливість визначити обсяг рівноважного онлайн-бюджету для конкуруючих фірм, а також рівноважне розподілення бюджету на різних веб-сайтах. Було ідентифіковано мережеву структуру для задачі рівноваги в умовах конкуренції, розв’язання якої визначає розміри рівноважного онлайн бюджету за умов конкуренції фірм, а також рівноважні розміщення цих бюджетів в термінах вартості реклами.

Задача оптимізації розподілу рекламного бюджету формулюється через варіаційні нерівності для умов рівноваги в сенсі Неша і дозволяє не тільки враховувати оптимізацію відгуку, але і отримати рівноважний розподіл бюджету, як наслідок цієї оптимізації. Було запропоновано спеціальний алгоритм і далі показано як цей алгоритм можна звести до більш загального алгоритму варіаційних нерівностей.

Хоча в цій роботі обговорюються стратегії рівноважного розміщення реклами в інтернеті (що теж є оптимізацією), оптимальний стан не-інтернет рекламування досягається одночасно витратою тих коштів, які залишились в бюджеті після розміщення тієї кількості реклами в Інтернеті, яка була розрахована завдяки даній моделі.

Список використаної літератури

1. Шевченко Г. В. Математична модель мережевої рівноваги при інтернет-рекламуванні / Г. В. Шевченко, С. С. Мушта // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2015. – № 5(39). – С. 59-64.

2. Шевченко Г. В. Математична модель мережевої рівноваги та алгоритм для обчислення рівноважного рекламного бюджету і його розподілу при інтернет-рекламуванні / Г. В. Шевченко, С. С. Мушта // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв`язку. – 2015. – № 6 (40). – С. 37-43.

3. Chatterjee P. Modeling the clickstream: implications for web-based advertising efforts / P. Chatterjee, D.L. Hoffman, T.P. Novak // Marketing Science. – 2003. – №22. – P. 520-541.

4. Zhao L. A network equilibrium framework for Internet advertising: Models, qualitative analysis and algorithms / L. Zhao, A. Nagurney // European Journal of Operational Research. – 2008. – №187. – P. 456-472.

5. Шевченко Г. В. Моделювання оптимального розміщення реклами підприємства з максимальним охопленням цільової аудиторії / Г. В. Шевченко // Формування ринкової економіки: збірник наукових праць. – Київ: КНЕУ, 2012. – № 28. – С. 501-514.

6. Dafermos S. An iterative scheme for variational inequalities / S. Dafermos // Mathematical Programming. – 1983. – №28. – P. 174- 185.

7. Reibstein D. Competitive responsiveness / D. Reibstein, D. Wittink // Marketing Science. – 2005. – №23. – P. 280-303.

8. Nash J.F. Noncooperative games / J.F. Nash // Annals of Mathematics. – 1951. – №54. – P. 286-298.

9. Dafermos S. Sensitivity analysis for the general asymmetric networkequilibrium problem / S. Dafermos, A. Nagurney // Mathematical Programming. – 1984. – №28. – P. 174-184.

10. Zhao L. General economic equilibrium and variational inequalities / L. Zhao, S. Dafermos // Operations Research Letters. – 1991. – №10. – P. 369-376.

11. Бугрій О. Про єдиність розв'язку деякої нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій області / О. М. Бугрій // Математичний вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 5- 13.

12. Dafermos S. The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand. Networks / S. Dafermos // Operations Research. – 1982. – №12. – P. 57-72.

13. Бугрій О. М. Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним степенем не лінійності / О. М. Бугрій, О. Т. Панат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49. – № 2. – С. 99-107.

References

1. Shevchenko G.V., Mushta S.S. "Mathematical model of network equilibrium in Internet advertising." *Naukovi zapysky Ukrainskoho naukovo-doslidnoho instytutu zwiazku* 5(39) (2015): 59-64.

2. Shevchenko G.V., Mushta S.S. "Mathematical model of network equilibrium and algorithm for calculation of equilibrium advertising budget and its distribution at Internet advertising." *Naukovi zapysky Ukrainskoho naukovo-doslidnoho instytutu zwiazku* 6(40) (2015): 37-43.

3. Chatterjee P., Hoffman D. L., Novak T. P. "Modeling the clickstream: implications for web-based advertising efforts." *Marketing Science* 22 (2003): 520-541.

4. Zhao L., Nagurney A. "A network equilibrium framework for Internet advertising: Models, qualitative analysis and algorithms." *European Journal of Operational Resear*ch 187 (2008): 456-472.

5. Shevchenko G.V. "Modeling optimal advertising of an enterprise with the maximum coverage of the target audience." *Formation of a market economy: a collection of scientific works* 28 (2012): 501-514.

6. Dafermos S. "An iterative scheme for variational inequalities." *Mathematical Programming* 28 (1983): 174-185.

7. Reibstein D., Wittink D. "Competitive responsiveness." *Marketing Science* 23 (2005): 280-303.

8. Nash J.F. "Noncooperative games." *Annals of Mathematics* 54 (1951): 286-298.

9. Dafermos S., Nagurney A. "Sensitivity Analysis for the general asymmetric network equilibrium problem." *Mathematical Programming* 28 (1984): 174-184.

10. Zhao L., Dafermos S. "General economic equilibrium and variational inequalities." *Operations Research Letters* 10 (1991): 369-376.

11. Bugry O. "On the uniqueness of the solution of some nonlinear parabolic variational inequality in an unbounded domain." *Mathematical Bulletin of the NTS*h 3 (2006). 5-13.

12. Dafermos S. "The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand." *Networks Operations Research* 12 (1982). 57-72.

13. Bugry O. M., Panat O. T. "Some properties of solutions of parabolic variational inequalities with varying degrees of nonlinearity." *Mat. methods and physical fur. fields* 49(2). (2006): 99-107.

Автори статті

Барабаш Олег Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна. Тел.: +380958702490. E-mail: bar64@ukr.net

Гайдур Галина Іванівна – кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри інформаційної та кібернетичної безпеки, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна. Тел.: +380442492504. E-mail: gaydurg@gmail.com

Шевченко Галина Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна. Тел.:+38050-2374120. E-mail: foxik.ryzyy@gmail.com

Дахно Наталія Борисівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна. Тел.: +380507268522. E-mail: nataly.dakhno@ukr.net

Authors of the article

Barabash Oleg Volodymyrovych – doctor of sciences (technic), professor, head of department of higher mathematics, State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine. Tel.: +380958702490. E-mail: bar64@ukr.net

Haidur Halyna Ivanivna – candidate of sciences (technic), associate professor, professor of information and cyber securitydepartment, State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine. Tel.: +380442492504, E-mail: gaydurg@gmail.com

Dakhno Nataliia Borysivna – candidate of science (technic), associate professor, department of higher mathematics, State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine. Tel: +380507268522. E-mail: nataly.dakhno@ukr.net

Shevchenko Halyna Volodymyrivna – candidate of science (technic), associate professor, department of higher mathematics, State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine. Tel: +380502374120. E-mail: foxik.ryzyy@gmail.com

Дата надходження
в редакцію: 25.10.2017 р.

Рецензент:
доктор технічних наук, професор
В.В. Вишнівський
Державний університет телекомунікацій, Київ