УДК 681.5.03, 004.7 DOI: 10.31673/2412-4338.2020.047986

Березовська Ю.В. *Державний університет телекомунікацій, Київ*

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ОБМЕЖЕНІЙ ВИХІДНІЙ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВИЗНАЧАЛЬНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

***Анотація**: Забезпечення функціональної стійкості, надійності та ефективного управління в інформаційних системах є складним комплексним науковим завданням. На стадії проектування і конструювання інформаційних систем показники надійності трактують як характеристики імовірнісних математичних моделей об'єктів, що створюються, а на стадії експериментального відпрацювання, випробувань і експлуатації роль показників надійності виконують статистичні оцінки відповідних імовірнісних характеристик. При оцінці показників надійності інформаційних систем часто відсутні необхідні вихідні дані для апріорних імовірнісних розрахунків, а статистична оцінка ускладнена невеликим обсягом випробувань, за якими можна визначити тільки оцінки моментів визначальних випадкових величин процесу функціонування інформаційних систем або її складових частин (математичні очікування і дисперсії напрацювання на відмову, час відновлення, резервний час тощо). Проте, у такій ситуації необхідно обґрунтовувати деякі характеристики інформаційної системи, наприклад, резерв часу, гарантовані точні границі ймовірності безвідмовної роботи системи та коефіцієнта готовності. При отриманні конкретних оцінок використовується мінімальна апріорна інформація, що відповідає великій кількості реальних ситуацій при оцінці надійності інформаційних систем з часовим резервуванням в процесі проектування, випробувань і експлуатації. У даній статті виділені різні типи функціоналів, які характеризують ефективність функціонування інформаційної системи, в умовах неповної апріорної інформації про функції розподілу визначальних випадкових величин, через які виражаються основні показники надійності інформаційних систем, запропонований і обґрунтований аналітичний метод знаходження функцій розподілу, що доставляють найбільше або найменше значення лінійного або дробово-лінійного функціоналів при моментних обмеженнях на варійовані функції розподілу. Метод ґрунтується на виділенні граничних функцій розподілу, побудові відповідних граничних багаточленів і розв'язанні спеціальних нерівностей.*

***Ключові слова:** інформаційна система, мережа, функціональна стійкість, надійність, обмежена апріорна інформація, визначальні випадкові величини, резерв часу.*

Berezovska Yu.V. *State University of Telecommunications, Kyiv*

ENSURING FUNCTIONAL STABILITY OF THE INFORMATION SYSTEM WITH LIMITED INITIAL INFORMATION ABOUT DETERMINING RANDOM VALUES

***Abstract:** Ensuring functional stability, reliability and effective management in information systems is a complex and complex scientific task. At the stage of design and construction of information systems, reliability indicators are interpreted as characteristics of the created probabilistic mathematical models of objects, and at the stage of experimental development, testing and operation, the role of reliability indicators is performed by statistical assessments of the corresponding probabilistic characteristics. When assessing the reliability indicators of information systems, the necessary initial data for a priori probabilistic calculations are often lacking, and the statistical assessment is hampered by a small volume of tests, according to which it is possible to determine only the estimates of the moments of determining random variables of the process of functioning of information systems or its components (mathematical expectations and variances of mean time between failures , recovery time, standby time, etc.). However, in such a situation, it is necessary to substantiate some characteristics of the information system, for example, a reserve of time, guaranteed exact boundaries of the probability of system uptime and the availability factor. When obtaining specific estimates, the minimum a priori information is used, which corresponds to a large number of real situations when assessing the reliability of information systems with time redundancy in the process of design, testing and operation. This article highlights various types of functionals that characterize the efficiency of an information system, under conditions of incomplete a priori information about the distribution function of determining random variables, through which the main indicators of the reliability of information systems are expressed,* *an analytical method is proposed and substantiated for finding distribution functions that deliver the greatest or least linear value. or linear fractional functionals under moment constraints on variable distribution functions. The method is based on identifying the limiting distribution functions, constructing the corresponding limiting polynomials, and solving special inequalities.*

Keywords: *information system, network, functional stability, reliability, limited a priori information, determining random values, time reserve.*

Березовская Ю.В. *Государственный университет телекоммуникаций, Киев*

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Аннотация: *Обеспечение функциональной устойчивости, надежности и эффективного управления в информационных системах является сложной комплексной научной задачей. На стадии проектирования и конструирования информационных систем показатели надежности трактуют как характеристики создаваемых вероятностных математических моделей объектов, а на стадии экспериментальной отработки, испытаний и эксплуатации роль показателей надежности выполняют статистические оценки соответствующих вероятностных характеристик. При оценке показателей надежности информационных систем часто отсутствуют необходимые исходные данные для априорных вероятностных расчетов, а статистическая оценка затруднена небольшим объемом испытаний, по которым можно определить только оценки моментов определяющих случайных величин процесса функционирования информационных систем или ее составных частей (математические ожидания и дисперсии наработки на отказ, время восстановления, резервное время и т.д.). Однако, в такой ситуации необходимо обосновывать некоторые характеристики информационной системы, например, резерв времени, гарантированные точные границы вероятности безотказной работы системы и коэффициента готовности. При получении конкретных оценок используется минимальная априорная информация, которая соответствует большому количеству реальных ситуаций при оценке надежности информационных систем с временным резервированием в процессе проектирования, испытаний и эксплуатации. В данной статье выделены различные типы функционалов, характеризующих эффективность функционирования информационной системы, в условиях неполной априорной информации о функции распределения определяющих случайных величин, через которые выражаются основные показатели надежности информационных систем, предложен и обоснован аналитический метод нахождения функций распределения, доставляющих наибольшее или наименьшее значение линейного или дробно-линейного функционалов при моментных ограничениях на варьируемые функции распределения. Метод основан на выделении предельных функций распределения, построении соответствующих предельных многочленов и решении специальных неравенств.*

Ключевые слова: *информационная система, сеть, функциональная устойчивость, надежность, ограниченная априорная информация, определяющие случайные величины, резерв времени.*

1. Вступ

На сьогоднішній день серйозної революції зазнає сектор телекомунікаційного зв’язку. Що і є рушійною силою у формуванні способів проектування і розгортання інформаційних систем, мереж і послуг, які необхідні користувачу.

Істотним впливом на ефективність використання в інформаційних системах (ІС) є часове резервування, як один із основних засобів забезпечення функціональної стійкості, надійності та ефективного управління.

На стадії проектування і конструювання ІС показники надійності трактують як характеристики імовірнісних математичних моделей об’єктів, що створюються, а на стадії експериментального відпрацювання, випробувань і експлуатації роль показників надійності виконують статистичні оцінки відповідних імовірнісних характеристик [1]. При оцінці показників надійності ІС часто відсутні необхідні вихідні дані для апріорних імовірнісних розрахунків, а статистична оцінка ускладнена невеликим обсягом випробувань, за якими можна визначити тільки оцінки моментів визначальних випадкових величин процесу функціонування ІС або її складових частин (математичні очікування і дисперсії напрацювання на відмову, час відновлення, резервний час тощо). Проте, у цій ситуації необхідно обґрунтовувати деякі характеристики ІС, наприклад, резерв часу, гарантовані точні границі ймовірності безвідмовної роботи системи та коефіцієнта готовності. Під "обґрунтуванням" при цьому розуміється побудова точних верхніх і нижніх границь зміни функціоналів, які характеризують ефективність функціонування інформаційної системи, в умовах неповної апріорної інформації про функції розподілу визначальних випадкових величин.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій.

У роботах [2, 3, 4] відображені дослідження щодо забезпечення функціональної стійкості спрямовані на підтримку надійності функцій системи.

У роботах Б.П. Креденцера, М.К. Жердєва, В.М. Цицарєва, С.В. Лєнкова та інших досліджені можливості підвищення надійності відновлюваних ІС з резервом часу при різних методах його введення і використання. Отримано сукупність розрахункових співвідношень для оцінки показників надійності при різних способах використання і поповнення резерву часу при наявності повної апріорної інформації про функції розподілу визначальних випадкових величин.

Найбільш повне відображення питання дослідження відновлюваних інформаційних систем з резервом часу отримали в роботі [5], однак в ній основна увага приділена прогнозуванню надійності ІС з поповнюваним резервом часу при наявності повної апріорної інформації про надійність.

3. Мета дослідження.

При аналізі та прогнозуванні надійності інформаційних систем в умовах наявності обмеженої апріорної інформації при формалізації задачі подати показники надійності у вигляді інтегралів ймовірностей. Залучити для знаходження верхніх і нижніх оцінок цих показників методи теорії моментів, пов'язані з розв'язанням екстремальних задач. Використовуючи необхідні і достатні умови існування чітких границь лінійних функціоналів, отримати двосторонні оцінки деяких характеристик, які найбільш часто використовуються при визначенні показників надійності ІС з резервом часу різних класів. Розглянути інтеграл, що входить до виразу для q – ймовірності того, що відмова об'єкта призведе до відмови ІС з резервом часу при постійній величині резерву часу і деякі функціонали, які використовуються при визначенні середнього часу відновлення ІС з резервом часу при $t_д = const$. Знайти оцінки функції розподілу суми двох незалежних випадкових величин.

При отриманні конкретних оцінок використовувати мінімальну апріорну інформацію, що відповідає великій кількості реальних ситуацій при оцінці надійності інформаційних систем з часовим резервуванням в процесі проектування, випробувань і експлуатації. Зокрема, якщо відомі лише початкові моменти функції розподілу визначальних випадкових величин, а вигляд цих функцій розподілу передбачається довільним, то при цій обмеженій інформації отримати нетривіальні оцінки і досить змістовні результати, корисні для практики.

4. Результати дослідження.

Дана стаття присвячена розробці аналітичного методу розв'язання екстремальних задач визначення двосторонніх оцінок функціоналів, які входять до основних показників надійності інформаційних систем з резервом часу. Показано, що граничними розподілами, на яких досягаються екстремуми інтеграла $I(F)$, є східчасті функції розподілу з обмеженим числом точок росту. Вводяться і досліджуються спеціальні функції $L(x)$ і $M(x)$, які слугують для знаходження відповідних функцій розподілу і граничних значень області зміни параметрів при зміні мінімуму (максимуму) функціоналу. Результати оцінки конкретних інтегралів отримані за допомогою граничних багаточленів, які будуються за знайденими граничними розподілами.

У точні і наближені формули для основних показників надійності інформаційних систем (ймовірності безвідмовної роботи $P(x, \tau_д)$, наробітку ІС на відмову $\underline{T}_н(\tau_д)$, середнього часу відновлення $\underline{T}_в(\tau_д)$, коефіцієнта готовності $K_г(\tau_д)$ та інших) у залежності від величини резерву часу $\tau_д$, що поповнюється, входять функціонали, які виражаються через інтеграли Стільтьеса або відношення двох таких інтегралів, що залежать від багатьох параметрів інформаційної системи [5].

Так, наприклад, до багатьох формул для показників надійності входить ймовірність того, що відмова об'єкта перейде в відмову ІС з резервом часу, яка для систем з поповнюваним резервом часу [3] визначається інтегралом

$$q = P\{\tau_д < t_в\} = \int_0^\infty D(x)dF_в(x), \tag{1}$$

де $F_в(x) = P\{\tau_д < t_в\}$ – функція розподілу часу відновлення $t_в$; $D(x) = P\{\tau_д < x\}$ – функція розподілу використовуваного в ІС резерву часу $\tau_д$, що поповнюється. В окремому випадку при $t_д = const$ маємо

$$q = P\{\tau_д < t_в\} = 1 - F_в(t_д). \tag{2}$$

Під час розподілу $\tau_д$ за експоненціальним законом з параметром γ або за законом Ерланга 2-го порядку з параметром $\nu = \frac{2}{t_д}$ [5] ймовірність q визначається виразами

$$q = \int_0^\infty [1 - e^{-\gamma x}]dF_в(x) \tag{3}$$

або

$$q = \int_0^\infty [1 - (1 + \nu x)e^{-\nu x}]dF_в(x). \tag{4}$$

Імовірність безвідмовної роботи ІС з резервом часу виражається формулами:

$$P(x, \tau_д) = e^{-\lambda q x}, x \gg \underline{\tau}_д; \tag{5}$$

$$P(x, t_д) = \{1, x \le t_д, exp[-\lambda(x - t_д)(1 - F_в(t_д))], x > t_д, \tag{6}$$

де $\lambda = \frac{1}{\underline{t}_н}$ – параметр експоненціального закону розподілу $F(x) = P\{t_н < x\}$ напрацювання об'єкта між сусідніми відмовами (що збігається з функцією розподілу напрацювання t_0 до першої відмови).

Середнє напрацювання ІС з резервом часу на відмову визначається виразом:

$$\underline{T}_н(\tau_д) = \frac{1}{q}\left[\underline{t}_н + M_{min}(t_в, \tau_д)\right], \tag{7}$$

де

$$M_{min}(t_в, \tau_д) = \int_0^\infty [1 - F_в(x)][1 - D(x)]dx. \tag{8}$$

При $t_д = const$ вираз для $M_{min}(t_в, \tau_д)$ буде мати вигляд:

$$M_{min}(t_в, \tau_д) = \int_0^{t_д} [1 - F_в(x)]dx. \tag{9}$$

Середній час відновлення ІС з резервом часу $\underline{T}_в(\tau_д)$ дорівнює перевищенню часу ремонту об'єкта над резервом часу за умови, що $t_в > \tau_д$, і визначається виразом

$$\underline{T}_{в1}(t_д) = \frac{t_в - M_{min}(t_в, \tau_д)}{1 - F_в(t_д)} = \frac{\int_{t_д}^\infty [1 - F_в(x)]dx}{1 - F_в(t_д)}, \tag{10}$$

де $\underline{t}_в = \int_0^\infty [1 - F_в(x)]dx$ – середній час відновлення об'єкта, а $M_{min}(t_в, \tau_д)$ визначається виразом (9). У загальному випадку, коли $\tau_д$ – випадкова величина з довільною функцією розподілу $D(x)$, формула для середнього часу відновлення має вигляд

$$\underline{T}_{в1}(\tau_д) = \frac{1}{q}\left[\underline{t}_в - M_{min}(t_в, \tau_д)\right]. \tag{11}$$

Коефіцієнт готовності ІС з резервом часу визначається виразом

$$K_{г1}(\tau_д) = \frac{\underline{t}_н + M_{min}(t_в, \tau_д)}{\underline{t}_н + \underline{t}_в} = k_г + (1 - k_г)(1 - q), \tag{12}$$

де $k_г = \frac{\underline{t}_н}{(\underline{t}_н + t_в)}$ – коефіцієнт готовності об'єкта, а $1 - q = P\{t_в \le \tau_д\} = \frac{M_{min}(t_в, t_д)}{\underline{t}_в}$.

Наведені вище результати відповідають випадку, коли час відновлення $t_в < \tau_д$ входить до корисного часу роботи інформаційної системи. Якщо ж відрізки часу $t_в < \tau_д$ не належать до корисного часу, тобто до тривалості відновлення ІС з резервом часу входить весь тривалий інтервал ремонту $t_в > \tau_д$, то вирази для основних показників надійності ІС з резервом часу, що виконують завдання тривалості $t_з$ при умові безвідмовної роботи об'єкта, приймають вигляд [5]

$$P(t_з, \tau_д) = exp(-\lambda q t_з), \tag{13}$$

де ймовірність q визначається співвідношенням (1), якщо $\tau_д$ – випадкова величина або (2), якщо $t_д = const$;

– середній наробіток ІС до зриву функціонування

$$\underline{T}_{ср}(\tau_д) = \frac{\underline{t}_н}{q}; \tag{14}$$

– середній час відновлення ІС

$$\underline{T}_{вг}(t_д) = \underline{T}_{в1}(t_д) + t_д = \frac{\int_{t_д}^{\infty} x dF_в(x)}{(1 - F_в(t_д))}; \tag{15}$$

– коефіцієнт готовності

$$K_{г2}(t_д) = \frac{\underline{t}_н + \int_0^{t_д} x dF_в(x)}{\underline{t}_н + \underline{t}_в}. \tag{16}$$

При оцінці показників надійності ІС з резервом часу при випадковому режимі використання об'єктів, коли разом з поповнюваним резервом часу $\tau_д$, передбаченим у самій системі, використовується резерв часу z_* з функцією розподілу $A(x) = P\{z_* < x\}$, обумовлений характером надходження завдань, ймовірність q визначається формулою

$$q = P\{z_* + \tau_д < t_в\} = \int_0^{\infty} S(x) dF_в(x), \tag{17}$$

де $S(x)$ – згортка двох функцій розподілу $A^*(x)$ і $D(x)$, тобто

$$S(x) = P\{z_* + \tau_д < x\} = \int_0^x D(x - t) dA^*(t) = \int_0^x A^*(x - t) dD(t). \tag{18}$$

Для функції розподілу часу z_* від моменту відмови об'єкта до моменту надходження завдання справедливі формули: $A^*(x) = P\{z_* < x\} = \frac{1}{z}\int_0^x [1 - A(t)] dt$, $\underline{z} = \int_0^{\infty} [1 - A(x)] dx$.

Таким чином, до основних показників надійності ІС з резервом часу входять функціонали наступних трьох видів:

перший вид:

$$I(F) = \int_0^{\infty} g(x, t) dF(x), \tag{19}$$

де $g(x, t)$ – задана функція, що залежить від вектора дійсних параметрів; $F(x)$ – змінна функція розподілу;

другий вид:

$$I(F) = \frac{\int_0^{\infty} g_1(x, t) dF(x)}{\int_0^{\infty} g_2(x, t) dF(x)}; \tag{20}$$

третій вид:

$$R(F_1, F_2) = \int_0^\infty F_2(x)dF_1(x), \quad (21)$$

де $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – функції розподілу різноманітних випадкових величин.

При наявності обмеженої інформації про змінні функції розподілу, коли відомі тільки початкові моменти цих розподілів, а їхній вид передбачається довільним, виникає задача знаходження глобальних екстремумів зазначених функціоналів при лінійних обмеженнях. Слід зазначити, що задача знаходження точних границь для дробово-лінійних функціоналів (20) при деяких умовах може бути зведена до пошуку глобального екстремуму лінійного функціоналу (19) [5, 6, 7]. Тому далі більш детально будуть досліджені лінійні функціонали (19) і (21).

У практичних задачах нерідко необхідно мати аналітичний розв’язок задачі в залежності від параметрів. Чисельна оптимізація навіть при трьох-чотирьох параметрах вимагає великих витрат машинного часу, а при п’яти параметрах, що змінюються на всій позитивній півосі, вона стає практично неможливою. Крім того, для розвитку аналітичного методу оцінки функціоналів (19), (21) є ще одна причина. У задачах оцінки показників надійності, як правило, мають справу з функціями розподілу, зосередженими на інтервалі $(0, \infty)$. Відомий алгоритм передбачає, що функція розподілу зосереджена на кінцевому інтервалі $(0, Q)$. У зв’язку з цим, у ряді випадків (навіть при досить великому інтервалі $(0, Q)$) для напівнескінченного проміжку отримуються погані наближення. Це відбувається кожного разу, коли основний вклад в інфімум або супремум функціоналу $I(F)$ визначається значенням підінтегральної функції $g(x, t)$ у точці x, що не лежить всередині будь-якого кінцевого інтервалу $(0, Q)$, наприклад, при $x \to \infty$.

Таким чином, задача побудови двосторонніх оцінок показників надійності інформаційних систем з поповнюваним резервом часу при наявності інформації тільки про початкові моменти функції розподілу визначальних випадкових величин зводиться до аналітичного знаходження глобальних екстремумів функціоналів виду (19), (21) при лінійних обмеженнях.

Розглянемо випадок, коли в ІС передбачений резерв часу $t_д = const$. До виразу ймовірності того, що відмова об’єкта призведе до відмови ІС з резервом часу входить величина $F_в(t_д)$. Сформулюємо задачу наступним чином:

знайти верхню і нижню границі зміни функціоналу

$$I(F) = F(T) = \int_0^T dF(x) = \int_0^\infty g(x, T)dF(x), \quad (22)$$

де $g(x, T) = \{1 \text{ при } 0 \le x < T, 0 \text{ при } x \ge T,$ а функція розподілу $F(x)$ задовольняє умові $\int_0^Q x^i dF(x) = S_i, i = 1, 2,$ при $Q = \infty$.

Верхні і нижні оцінки цього функціоналу в різних областях зміни параметра T будуть мати наступний вигляд:

1) при зміні параметра $0 < T < S_1$: $I(F) = 0$, точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T,\ x_2 = n,\ n \to \infty$, граничний багаточлен $U_0(x) = 0$; $I(F) = \frac{S_2 - S_1^2}{S_2 - 2TS_1 + T^2}$, точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T$, $x_2 = \frac{S_2 - S_1 T}{S_1 - T}$, граничний багаточлен $U_0(x) = \frac{(x - x_2)^2}{(T - x_2)^2}$;

2) при зміні параметра $S_1 \le T < \frac{S_2}{S_1}$: $I(F) = \frac{T - S_1}{T}$, точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = T$, граничний багаточлен $U_0(x) = 1 - \frac{x}{T}$; $I(F) = 1$, точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = T$, граничний багаточлен $U_0(x) = 1$;

3) при зміні параметра $T \ge \frac{S_2}{S_1}$: $I(F) = \frac{(T - S_1)^2}{S_2 - 2TS_1 + T^2}$, точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = \frac{S_1 - S_2}{T - S_1}$, $x_2 = T$, граничний багаточлен $U_0(x) = 1 - \frac{(x - x_1)^2}{(T - x_1)^2}$; $I(F) = 1$,

точки росту граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = \frac{S_1 T - S_2}{T - S_1}$, $x_2 = T$, граничний багаточлен $U_0(x) = 1$.

Можна сказати, що східчаста функція розподілу $F(x)$ з точками росту x_1, x_2, x_3 є граничною, якщо багаточлен $U_0(x) = u_1 + u_2 x + u_3 x^2$ задовольняє умові $U_0(x) \le g(x,T)$ для всіх $x \ge 0$ при пошуку мінімального значення інтеграла (22) (або умові $U_0(x) \ge g(x,T)$ при пошуку максимального значення цього інтеграла). Коефіцієнти цього багаточлена u_i, $i = \underline{1,3}$ визначаються з рівностей $g(x_i,T) = U_0(x_i)$, $i = \underline{1,3}$.

Так, наприклад, в області $0 < T < S_1$ гранична функція розподілу $F_0(x)$ має точки зростання $x_1 = T$, $x_2 = \frac{S_2 - S_1 T}{S_1 - T}$, граничний багаточлен $U_0(x) = 0$, а мінімальне значення інтеграла $I(F) = 0$. При $S_1 \le T < \frac{S_2}{S_1}$ гранична функція розподілу має точки зростання $x_1 = 0$, $x_2 = T$ і $x_3 = n$ при $n \to \infty$. Відтак, рівняння граничного багаточлена $U_0(x)$ буде мати вигляд $U_0(x) = 1 - \frac{x}{T}$. Мінімальне значення інтеграла (22) буде дорівнювати $I(F) = \frac{(T - S_1)}{T}$.

Якщо відомо, що випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$ не приймає значень, більших за Q, тобто $F(Q+0) = 1$, тоді нижні оцінки функціонала $I(F)$ (22) в областях $0 < T < S_1$ і $T > \frac{S_2}{S_1}$ й верхні оцінки в областях $0 < T < S_1$ і $T \ge \frac{S_2}{S_1}$ збігаються з наведеними вище. При $S_1 < T \le \frac{S_2}{S_1}$ найменше значення $I(F) = \frac{(S_2 - S_1(T+Q) + TQ)}{TQ}$, а найбільше $I(F) = 1 - \frac{(S_2 - S_1 T)}{Q(Q-T)}$, оскільки точки зростання граничних функцій розподілу $x_1 = 0$, $x_2 = T$ і $x_3 = Q$, а стрибки в тих p_i, $i = \underline{1,3}$ визначаються з моментних умов. Зокрема, $I(F) = 1 - \frac{\int_0^Q V_3(x) dF(x)}{V_3(Q)} = 1 - \frac{\int_0^Q x(x-T) dF(x)}{Q(Q-T)} = \frac{S_2 - S_1 T}{Q(Q-T)}$. Якщо інформація про функцію розподілу $F(x)$ обмежена знанням тільки середнього значення $S_1 = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx$, тоді двосторонні оцінки функціонала $I(F)$ матимуть вигляд $I(F) = \{0$ при $0 < T \le S_1$, $\frac{T - S_1}{T}$ при $T > S_1, I(F) = 1$ при всіх можливих співвідношеннях S_1 і T.

Необхідність в отриманні наведених оцінок виникає при апріорних імовірнісних розрахунках ймовірності того, що відмова об'єкта призведе до відмови ІС з резервом часу при невипадковій (постійній) величині резерву часу $t_д = T = const$ і наявності інформації тільки про математичне очікування або про середнє значення і дисперсії функції розподілу часу відновлення об'єкта (2).

При визначенні середнього часу відновлення ІС з резервом часу різних класів при наявності обмеженої інформації про функції розподілу часу відновлення об'єкта виникає задача побудови двосторонніх оцінок функціоналів

$$I_1(F) = \int_0^T (x - T) dF(x), \tag{23}$$

$$I_2(F) = \frac{\int_0^T [1 - F(x)] dx}{(1 - F(T))}, \tag{24}$$

$$I_3(F) = \frac{\int_T^Q x dFx}{(1 - F(T))}, \tag{25}$$

де T – постійна величина резерву часу $t_д = T$; $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини $t_в$, яка належить множині функції розподілу K_2, що задовольняють обмеженням $\int_0^Q x^i dF(x) = S_i$, $i = 1, 2$. Функціонал $I_1(F)$ входить у вираз для $M_{min}(t_в, t_д)$, $I_2(F)$ – для похибки визначення $\underline{T}_н(\tau_д)$, а $I_3(F)$ – в формулу, яка визначає $\underline{T}_в(t_д)$.

Розглянемо функціонал $I_1(F)$ (23) $I_1(F) = \int_0^T (x - T) dF(x) = \int_0^\infty g(x) dF(x)$, де $g(x) = \{x - T$ при $0 < x \le T$, 0 при $x > T$.

Використовуючи необхідні і достатні умови існування точної верхньої границі функціоналу $I_1(F)$, можна визначити, що

$$I_1(F) \ = \{0 \text{ при } T < S_1,\ S_1 - T \text{ при } T \geq S_1, \tag{26}$$

оскільки в першому випадку граничний багаточлен $U_0(x) = 0$, а в другому $U(x) = x - T$, тобто $sup_{F \in K_2} \int_0^\infty \ \ xdF(x) - T = S_1 - T$.

При пошуку найменшого значення функціоналу $I_1(F)$ визначимо функцію $L(0) = g'(0) + g'\big(B(0)\big) + \frac{2[g(0)-g(B(0))]}{B(0)} = \frac{B(0)-2T}{B(0)}$, де $B(0) = \frac{S_2}{S_1}$. Функція $L(0) > 0$ при $T < \frac{1}{2}B(0)$, а $M\big(B(0)\big) < 0$, тобто в області $T < \frac{S_2}{2S_1}$ екстремальна функція розподілу F_0 має точки зростання $x_1 = 0, x_2 = \frac{S_2}{S_1}$. Тоді $I_1(F) \ = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 = T\left(\frac{S_1^2}{S_2} - 1\right)$.

Здійснюючи аналогічні міркування, можна показати, що при $T \geq \frac{S_2}{2S_1}$ найменше значення функціонала $I_1(F)$, що дорівнює $\frac{1}{2}\left[S - T - \sqrt{T^2 - 2TS_1 + S_2}\right]$ досягається на функції розподілу з точками зростання $x_{1,2} = T \mp \sqrt{T^2 - 2TS_1 + S_2}$, тобто

$$I_1(F) \ = \{T\left(\frac{S_1^2}{S_2} - 1\right) \text{ при } T < \frac{S_2}{2S_1},\ \frac{1}{2}\left[S_1 - T - \sqrt{T^2 - 2TS_1 + S_2}\right] \text{ при } T \geq \frac{S_2}{2S_1}. \tag{27}$$

Отже, отримані верхні і нижні оцінки $M_{min}\big(t_в, t_д\big)$ (26) та (27) відповідно можуть бути використані при визначенні граничних значень показників надійності ІС з резервом часу, в які входить ця величина, при наявності інформації тільки про моменти розподілу випадкової величини часу відновлення.

Розглянемо тепер функціонал $I_2(F)$ (24). Для отримання двосторонніх оцінок представимо його в "стандартному" вигляді, тобто $I_2(F) = \frac{\int_0^T \ \ [1-F(x)]dx}{(1-F(T))} = \frac{\int_0^\infty \ \ g_1(x,T)dF(x)}{\int_0^\infty \ \ g_2(x,T)dF(x)} = \frac{I'(F)}{I''(F)}$, де $g_1(x,T) = \{x \text{ при } 0 \leq x < T,\ T \text{ при } x \geq T,\ \ g_2(x,T) = \{0 \text{ при } 0 \leq x < T,\ 1 \text{ при } x \geq T$.

Функціонал $I_2(F)$ задовольняє умовам (20) і тому задача $I_2(F) \to inf,\ F \in K_2$ зводиться до задачі $\gamma_c(F) \to inf,\ \ F \in K_2$, де $\gamma_c(F) = I'(F) - cI''(F)$, $c = inf\, I(F),\ \ F \in K_2$ або в еквівалентному запису $\gamma_c(F) = \int_0^\infty \ \ [g_1(x,T) - cg_2(x,T)]dF(x) = \int_0^\infty \ \ g_3(x,T)dF(x)$, де $g_3(x,T) = \{x, \text{якщо } 0 \leq x < T,\ T - c, \text{якщо } \ x \geq T$.

Знайдемо екстремальні функції розподілу для задачі $\gamma_c(F) \to inf,\ F \in K_2$. Вони будуть екстремальними і для задачі $I(F) \to inf,\ F \in K_2$. Легко здогадатися, що якщо $T < S_1$, то в якості першої точки зростання можна взяти $x_1 = T$, а другу і третю знаходимо за допомогою моментних умов $x_2 = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T} - \delta,\ x_3 = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T} + \delta,\ \delta \to 0$. Відповідний граничний багаточлен дорівнює 0, а $I(F) \ = T$. Екстремальні значення функціоналу $I(F)$ будуть мати такий вигляд:

1) при зміні параметра $0 \leq T < S_1$: $I(F) \ = T$, точки зростання граничної функції розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T,\ x_2 = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T}$; $I(F) \ = \frac{T(S_1 - T)^2}{S_2 - 2S_1T + T^2}$, точки зростання граничної функції розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T, x_2 = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T}$;

2) при зміні параметра $S_1 \leq T < \frac{S_2}{S_1}$: $I(F) \ = T$, точки зростання граничної функції розподілу $F_0(x)$: $x_1 =0,\ x_2 = T$; $I(F) \ = \infty$, точки зростання граничної функції розподілу $F_0(x)$: $x_1 = 0, x_2 = T$;

3) при зміні параметра $T \geq \frac{S_2}{S_1}$: $I(F) \ = \frac{S_1(T^2 - 2TS_1 + S_2)}{S_2 - S_1^2}$, точки зростання граничної функції розподілу $F_0(x)$: $x_1 = \frac{S_1T - S_2}{T - S_1}, x_2 = T$; $I(F) \ = \infty$, точки зростання граничної функції розподілу

$F_0(x)$: $x_1 = \frac{S_1T - S_2}{T - S_1}$, $x_2 = T$.

Для розглянутого функціоналу так само, як і для функціоналу $I_3(F) = F(T)$ інфімум і супремум обчислюється за допомогою одних і тих самих граничних функцій розподілу.

Розглянемо функціонал $I_3(F)$ (25). Припустимо, що час відновлення не обмежується ($Q = \infty$) або не може приймати значень, більших Q, тобто $F(Q+0) = 1$. Тоді, проводячи аналогічні розмірковування для функціоналу $I_3(F) = \frac{\int_T^Q \quad xdFx}{(1 - F(T))}$, можна отримати двосторонні оцінки його зміни в залежності від параметрів за умови, що $F(x) \in K_2$. Наведемо ці результати:

– в області зміни параметрів $0 < T < S_1$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T$, $x_2 = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T}$, $I_2(F) \; = \frac{S_2 - S_1T}{S_1 - T}$;

– в області зміни параметрів $T > S_1$ при $Q = \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = S_1$, $x_2 = n, n \to \infty$, $I_2(F) \; = \infty$;

– в області зміни параметрів $T > S_1$ при $Q < \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = \frac{S_1T - S_2}{T - S_1}$, $x_2 = Q$, $I_2(F) \; = Q$;

– в області зміни параметрів $0 \le T < S_1$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = T$, $x_2 = B(T)$, $I_3(F) \; = S_1$;

– в області зміни параметрів $S_1 < T < \frac{S_2}{S_1}$ при $Q = \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = T$, $I_3(F) \; = T$;

– в області зміни параметрів $T > \frac{S_2}{S_1}$ при $Q = \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = B(T)$, $x_2 = T$, $I_3(F) \; = T$;

– в області зміни параметрів $S_1 < T < \frac{S_2}{S_1}$ при $Q < \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = T$, $x_3 = Q$, $I_3(F) \; = \frac{S_1 + Q}{(Q+T)S_1 - S_2}$;

– в області зміни параметрів $T > \frac{S_2}{S_1}$ при $Q < \infty$ точки зростання граничних функцій розподілу $F_0(x)$: $x_1 = B(T)$, $x_2 = T$, $I_3(F) \; > T$.

Таким чином, отримані двосторонні оцінки зміни функціоналів, які належать виразам ймовірності перевищення часом відновлення виділеного ІС резерву часу, верхні і нижні границі зміни середнього значення мінімальної з двох величин – випадкової і невипадкової, а також визначені границі зміни дробово-лінійних функціоналів. Ці результати отримані в припущенні, що резерв часу – невипадкова постійна величина, а про функції розподілу випадкової величини часу відновлення відомі тільки моменти (математичне очікування або математичне очікування і дисперсія).

6. Висновки.

У даній статті виділені різні типи функціоналів від функцій розподілу, через які виражаються основні показники надійності ІС, запропонований і обґрунтований аналітичний метод знаходження функцій розподілу, що доставляють найбільше або найменше значення лінійного або дробово-лінійного функціоналів при моментних обмеженнях на варійовані функції розподілу. Метод ґрунтується на виділенні граничних функцій розподілу, побудові відповідних граничних багаточленів і розв’язанні спеціальних нерівностей.

Список використаної літератури

1. Лєнков С.В. Алгоритм прогнозування для показників надійності і вартості експлуатації об’єктів радіоелектронних засобів озброєння / С. В. Лєнков, Г. В. Банзак, В. М. Цицарєв, Я. М. Проценко // Системи обробки інформації. – 2016. – № 9(146). – С. 28–30.

2. Барабаш О.В. Понятійний апарат функціональної стійкості розподілених інформаційно-керуючих систем / О. В. Барабаш, С. В. Козелков, О. А. Машков // Збірник наукових праць НЦ ВПС ЗС України. – К., 2005. – Вип. № 7. –С. 87–95.

3. Барабаш О.В., Мусієнко А.П. Основні поняття функціональної стійкості бездротової сенсорної мережі // Актуальні проблеми інформаційних технологій: Науково-технічної конференції молодих учених. – К.: КНУ, 2017. – С. 39–40.

4. Собчук В.В., Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Лаптєв О.А. Аналіз основних підходів та етапів щодо забезпечення властивості функціональної стійкості інформаційних систем підприємства. Sciences of Europe, Praha: Sciences of Europe, 2019. Vol 1, No 42. P. 41–44.

5. Оцінка надійності резервованих систем при обмеженій вихідній інформації : Монографія / [Б. П. Креденцер та ін.] / Під науковою редакцією доктора технічних наук, професора Б. П. Креденцера. – К. : «Фенікс», 2013. – 335 с.

6. Стойкова Л.С. Наибольшая точная нижняя граница вероятности отказа системы в специальном интервале времени при неполной информации о функции распределения времени до отказа системы / Л. С. Стойкова // Кибернетика и системный анализ. – К., 2017. – Т. 53, № 2. – С. 65–73.

7. Стойкова Л.С. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения времени до отказа системы / Л. С. Стойкова, С. Н. Красников // Кибернетика и системный анализ. – К., 2016. – Т. 52, № 6. – С. 84–94.

References

1. Lenkov S.V., Banzak G. V., Cicarev V. M, Procenko Ya. M.(2016) Forecasting algorithm for indicators of reliability and cost of operation of objects of electronic weapons [Algoritm prognozuvannya dlya pokaznikiv nadijnosti i vartosti ekspluatacii ob’ektiv radioelektronnih zasobiv ozbroennya*]. Information processing systems.* No 9(146). P. 28–30.

2. Barabash O.V., Kozelkov S. V., Mashkov O. A. (2005) Conceptual apparatus of functional stability of distributed information and control systems [Ponyatijnij aparat funkcional'noї stijkosti rozpodilenih informacijno-keruyuchih system] *Collection of scientific works of the Air Force Center of the Armed Forces of Ukraine*. Kyiv. Issue. № 7. P. 87–95.

3. Barabash O.V., Musienko A.P. (2017) Basic concepts of functional stability of a wireless sensor network [Osnovni ponyattya funkcional'noi stijkosti bezdrotovoi sensornoi merezhi] *Current issues of information technology: Scientific and Technical Conference of Young Scientists*. K.: KNU, P. 39–40.

4. Sobchuk V.V., Barabash O.V., Musienko A.P., Laptev O.A. (2019) Analysis of the main approaches and stages to ensure the properties of the functional stability of information systems of the enterprise [Analiz osnovnih pidhodiv ta etapiv shchodo zabezpechennya vlastivosti funkcional'noi stijkosti informacijnih sistem pidpriemstva] *Sciences of Europe*, Praha: Sciences of Europe. Vol 1, No 42. P. 41–44.

5. B. P. Kredencer et al. Under the scientific editorship of Doctor of Technical Sciences, Professor B. P. Kredencer (2013) “*Evaluation of the reliability of redundant systems with limited source information: Monograph*” [Ocinka nadijnosti rezervovanih sistem pri obmezhenij vihidnij informacії : Monografiya]. K.:«Feniks». 335 p.

6. Stojkova L.S. (2107) The most accurate lower limit of the probability of system failure in a special time interval with incomplete information about the time distribution function before system failure [Naibol'shaya tochnaya nizhnyaya granica veroyatnosti otkaza sistemy v special'nom intervale vremeni pri nepolnoj informacii o funkcii raspredeleniya vremeni do otkaza sistemy]. *Cybernetics and systems analysis.* Vol. 53. No 2. P. 65–73.

7. Stojkova L.S. Krasnikov S. N. (2016) Exact lower limits of the probability of system failure in the time interval with incomplete information about the time distribution function before system failure [Tochnye nizhnie granicy veroyatnosti otkaza sistemy v intervale vremeni pri nepolnoj informacii o funkcii raspredeleniya vremeni do otkaza sistemy]. *Cybernetics and systems analysis*. Vol. 52, № 6. P. 84–94.