

Клобукова Л.П., Швець І.П., Торошанко А.І.  
Національний авіаційний університет

## ПОХИБКИ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ У БАГАТОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМАХ ЗВ'ЯЗКУ З ОРТОГОНАЛЬНОЮ МОДУЛЯЦІЄЮ

**Анотація.** Розглянуті похибки відновлення вихідних неперервних сигналів у цифрових системах зв'язку з ортогональних модуляцією піднесучих з еквідистантним розташуванням (так звана технологія OFDM). У якості науково-технічного підґрунтя проблеми застосовано теорію радіотехнічних кіл та сигналів. Проаналізовано спектри дискретних сигналів, досліджено вплив порушень умов теореми Котельникова та асимптотику похибок відновлення вихідних неперервних сигналів. Розроблено методи аналізу складених сигналів з довільним вибором частоти дискретизації рознесених піднесучих, отримані кількісні оцінки якості відновлення сигналів на приймальній стороні з використанням Евклідових відстаней. Показано, що при узгодженні величини частотного зсуву базисних функцій розкладання в ряд та шириною спектру основної та бічних пелюсток у спектрі вихідного сигналу можна розраховувати на мінімальний вплив взаємних завад та міжсимвольної інтерференції складеного сигналу. Встановлено, що коректний вибір частоти дискретизації OFDM-сигналів дозволяє підвищити точність відновлення сигналів на приймальній стороні та загальну ефективність системи безпроводового зв'язку. Крім того, при динамічній зміні числа членів ряду розкладання в безпроводових мережах зменшується вплив частотних колізій, пульсацій Гіббса та рівень внутрішньосистемних завад. Графічний аналіз результатів розкладання в ряд по квазіортогональній системі базисних функцій свідчить, що похибки відновлення вихідних сигналів можуть досягати неприйнятних величин. Встановлено також, що при розкладанні в неортогональний ряд з більшим числом членів ситуація з відновленням вихідних сигналів стає трохи більш придатною, але гарантії покращання ситуації з похибками відновлення можна дати тільки при поєднанні коректного вибору частоти дискретизації з числом членів розкладання в ряди. Ця проблема потребує додаткових досліджень аналітичного та розрахункового характеру.

**Ключові слова:** технологія OFDM, теорія радіотехнічних кіл та сигналів, теорема Котельникова, Евклідова відстань, нев'язки відновлення вихідних неперервних сигналів.

Klobukova L.P., Shvets I.P., Toroshanko A.I.  
National Aviation University

## ERRORS OF RECOVERY OF SIGNALS IN MULTI-CHANNEL COMMUNICATION SYSTEMS WITH ORTHOGONAL MODULATION

**Abstract.** The errors of restoration of original continuous signals in digital communication systems with orthogonal modulation of equidistant subcarriers (the so-called OFDM technology) are considered. The theory of radio engineering circuits and signals is applied as a scientific and technical basis of the problem. The spectra of discrete signals were analyzed, the influence of violations of the conditions of Kotelnikov's theorem and the asymptotics of the recovery errors of the original continuous signals were investigated. Methods of analyzing composite signals with arbitrary selection of the sampling frequency of spaced subcarriers have been developed, and quantitative estimates of the quality of signal recovery on the receiving side using Euclidean distances have been obtained. It is shown that when the amount of frequency shift of the basic series decomposition functions and the width of the spectrum of the main and side lobes in the spectrum of the output signal

are matched, it is possible to count on the minimal influence of mutual interference and intersymbol interference of the composite signal. It was established that the correct selection of the sampling frequency of OFDM signals allows increasing the accuracy of signal recovery on the receiving side and the overall efficiency of the wireless communication system. In addition, with a dynamic change in the number of members of the decomposition series in wireless networks, the influence of frequency collisions, Gibbs ripples, and the level of intersystem interference is reduced. Graphical analysis of the results of the series expansion on the quasi-orthogonal system of basis functions shows that the errors of restoration of the original signals can reach unacceptable values. It was also established that when expanding into a non-orthogonal series with a larger number of members, the situation with the restoration of the original signals becomes a little more suitable, but guarantees of improving the situation with recovery errors can be given only when combining the correct selection of the sampling frequency with the number of members of the series expansion. This problem requires additional research of an analytical and computational nature.

**Key words:** OFDM technology, theory of radio circuits and signals, Kotelnikov's theorem, Euclidean distance, inconsistencies of restoration of original continuous signals.

### 1. Постановка проблеми.

Цією статтею подовжується цикл робіт з методів ортогонального та квазіортогонального частотного розділення каналів у безпроводових системах та мережах зв'язку. Основний напрям наукових досліджень – впровадження методів теорії радіотехнічних кіл та сигналів. У пропонованій статті розглянуті методи аналізу похибок та кількісні характеристики завад, що виникають при представленні сигналів з обмеженим спектром та з обмеженою довжиною при скінченному числі складових ряду Котельникова.

### 2. Аналіз останніх досліджень і публікацій.

У роботі [1] на наукових засадах теорії сигналів та ортогональних розкладань розглянуто принцип ортогонального мультиплексування з ортогональним частотним розділенням каналів для обміну даними з прийнятною швидкістю через довільні середовища передачі. Механізмам формування похибок в вказаній системі передачі даних в даній роботі уваги не приділено.

### 3. Мета і задачі дослідження.

Метою роботи є аналіз механізмів формування похибки відновлення вихідних неперервних сигналів у цифрових системах зв'язку з ортогональними модуляцією піднесучих з еквідистантним розташуванням.

У представленій статті основну увагу приділено похибкам відновлення сигналів при різних частотах дискретизації та різному числі членів ряду розкладання.

### 4. Результати дослідження.

Найбільший теоретичний інтерес представляють похибки відновлення сигналів після прийому та опрацювання цифровими методами. Неабиякий інтерес також представляє порівняння факторів впливу частоти дискретизації та числа членів ряду розкладання.

Як відмічено у роботі [1], в теорії та практиці аналізу електричних сигналів широко використовується теорема Котельникова, на підґрунті якої формується відповідний ряд.

Членами ряду є функції виду  $\text{sinc } x = \sin x/x$ , інваріантні до часового зсуву.

Оскільки амплітудно-частотний спектр прямокутного імпульсу описується функцією  $|\text{sinc}(x)| = |\sin(x)/x|$ , розкладання саме в ряд Котельникова є найбільш природним та наочним інструментом формування дискретного сигналу, аналізу його параметрів та відновлення на приймальній стороні.

При виборі частоти дискретизацією за теоремою Котельникова умова ортогональності дотримується, і похибка відновлення сигналу (нев'язка відновлення) стає мінімально можливою. Величина похибки залежить тільки від числа членів розкладання. На рис. 2

зображені графіки вихідного сигналу (штрихова лінія) та відновленого сигналу (суцільна лінія), а на рис. 3 – графік модулю нев'язки відновлення.

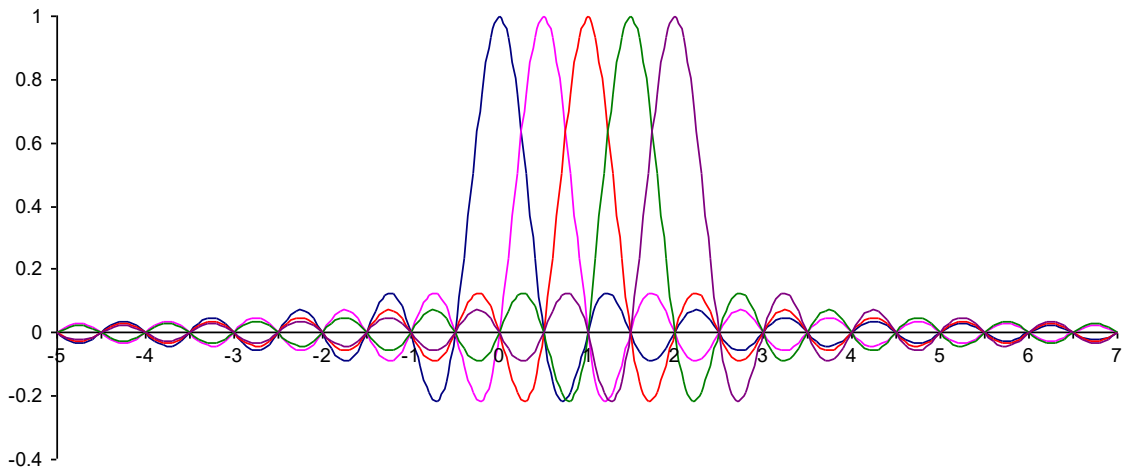


Рис. 1 Графік п'яти членів ряду розкладання прямокутного імпульсу.

Частота дискретизації  $f_d = 2/\tau_p$

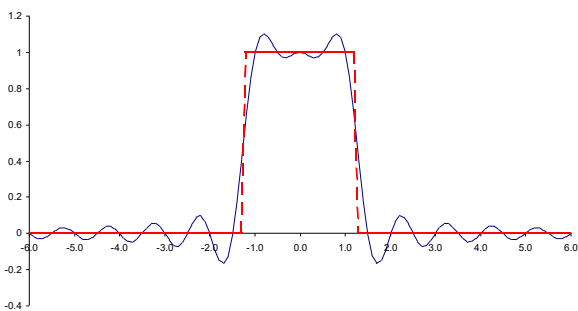


Рис. 2 Графіки вихідного сигналу (прямокутний імпульс) та відновленого сигналу після його опрацювання на приймальній стороні

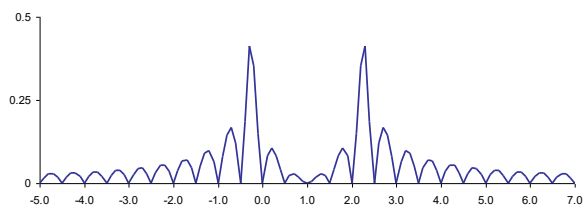


Рис. 3 Графік модулю нев'язки відновлення

Зверніть увагу на пульсації Гіббса [2], які виникають при обмеженні числа членів ряду розкладання. Вони мають наступну специфіку:

- обвідна загасань пульсацій близька до обвідної амплітудно-частотного спектру вихідного сигналу;
- частота пульсацій близька до частоти першого відкинутого члену ряду;
- амплітуда головної пелюстки пульсацій не змінюється при збільшенні числа членів розкладання. В цьому можна практично перекопатися при аналізі пульсацій при різному числі членів розкладання (див. графіки нижче).

Функція модулю нев'язки відновлення має такий вигляд:

$$\Phi_{div}(t) = |g_\varepsilon(t) - g(t)|, \quad g(k) = g(k\Delta t_{discr}), \quad 1 \leq k \leq 5, \quad (1)$$

де  $g(t)$ ,  $g_\varepsilon(t)$  – вихідний сигнал та відновлений сигнал відповідно;

$g(k\Delta t_{discr}), 1 \leq k \leq 5$  – набір з п'яти дискретних відліків неперервного сигналу.

Евклідова норма [3] відстані між  $g(t)$  та  $g_\varepsilon(t)$  визначається за виразом

$$\delta_{g\varepsilon} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [g_\varepsilon(t) - g(t)]^2 dt}, \quad (2)$$

а відносний квадрат норми відстані між  $g(t)$  та  $g_\varepsilon(t)$  – за виразом

$$\sigma_\varepsilon^2 = \delta_{g\varepsilon}^2 / \|g(t)\|^2, \quad -t_{\max} \leq t \leq t_{\max}, \quad |t_{\max} < \infty|. \quad (3)$$

При збільшенні числа членів ряду розкладання слід очікувати, що відновлений сигнал буде більш точно повторювати вихідний сигнал [4]. На рис. 4 зображені графіки вихідного сигналу (прямокутного імпульсу одиничної довжини) та відновленого сигналу при розкладанні в ряд з 21 членом. На рис. 5 зображений графік нев'язок відновлення сигналу.

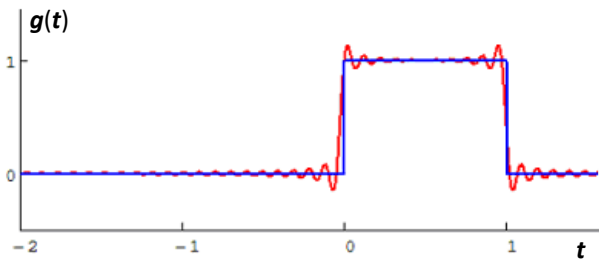


Рис. 4 Графіки вихідного та відновленого сигналів

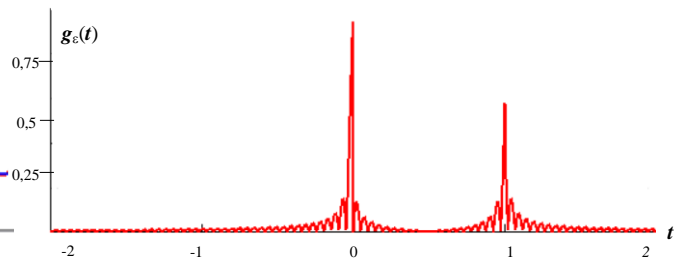


Рис. 5 Графік нев'язок відновлення

При проведенні розрахунків за формулами (1 – 3) встановлено, що при відновленні сигналу квадрат евклідової відстані між вихідним та відновленим сигналами швидко зменшується при зростанні частоти дискретизації (див. рис. 6).

Здавалося б, чим більше частота дискретизації, тим краще точність відновлення сигналу, однак тут треба враховувати інші фактори впливу.

По-перше, при збільшенні частоти дискретизації зростають вимоги до швидкодії пристроїв цифрового опрацювання сигналів. По-друге, росте шкідливий вплив завад різної природи, які проникають у широкосмугові системи [5, 6]. Тому остаточне рішення стосовно вибору частоти дискретизації сигналів у системах з багатьма піднесучими треба приймати на підґрунті системного підходу, з урахуванням суперечливих умов та прийняттям компромісних рішень.

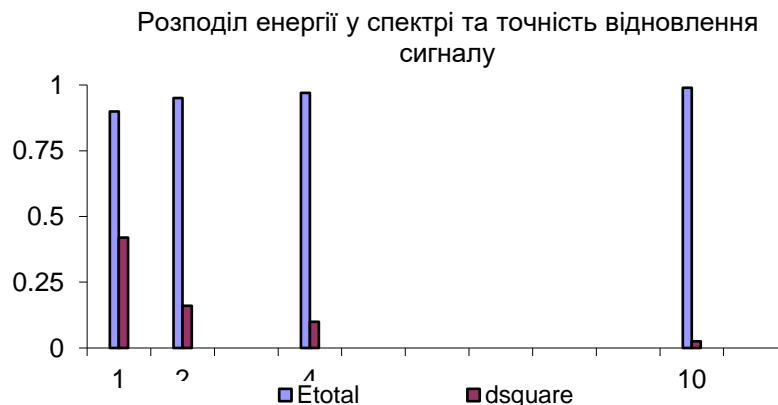


Рис. 6. Розподіл енергії у спектрі та точність відновлення сигналу

На завершення роботи дослідимо розкладання в ряд з п'яти членів, коли умови теореми Котельникова не дотримуються (рис. 6 – 8).

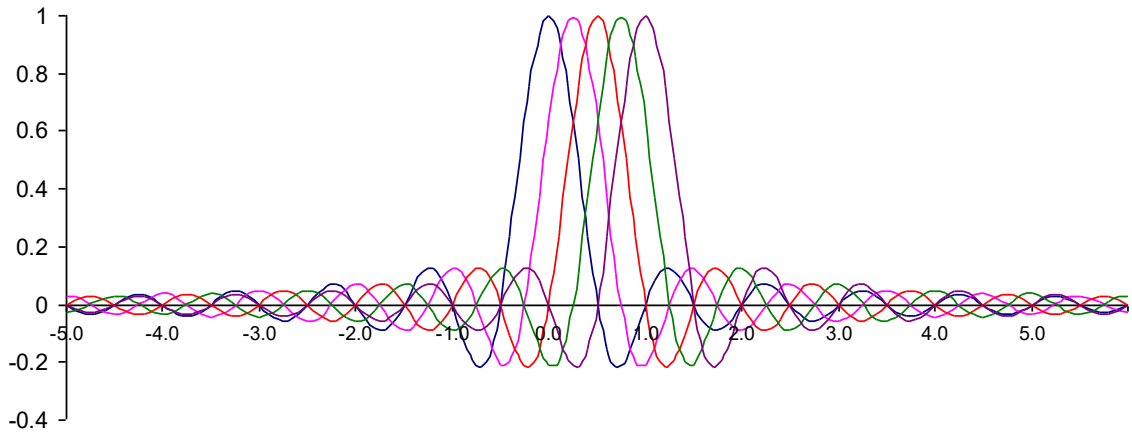


Рис. 6 Графік п'яти членів ряду розкладання прямокутного імпульсу.

Частота дискретизації  $f_d = 1/\tau_p$

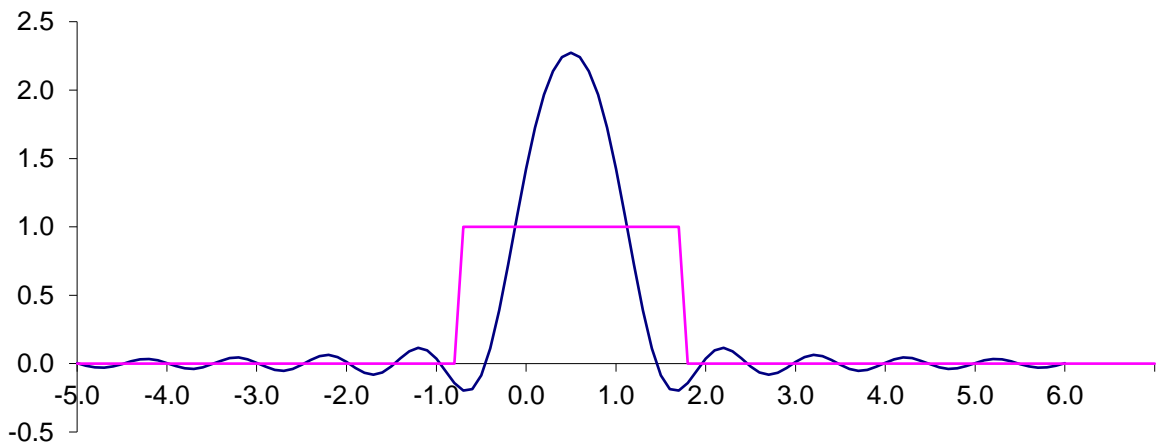


Рис. 7 Графіки вихідного сигналу (прямокутний імпульс) та відновленого сигналу після його опрацювання на приймальній стороні. Частота дискретизації  $f_d = 1/\tau_p$

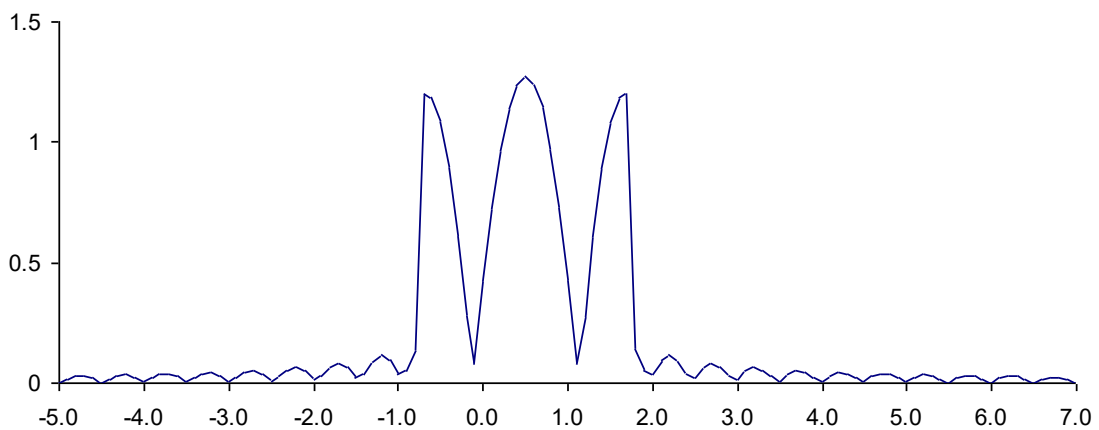


Рис. 8 Графік нев'язки відновлення сигналу

Результати досліджень свідчать про те, що при порушенні умов ортогоналізації системи базисних функцій Евклідова норма відстані між  $g(t)$  та  $g_\varepsilon(t)$  (вираз (2)) стає неприпустимо великою, а просте збільшення числа членів розкладання в ряд не дає помітного покращання.

Особливо яскраво це проявляється при наявності розривів (хоча б навіть першого роду) у сигнальних функціях, таких, як, наприклад, прямокутні імпульси. Крутизна перепадів "розмивається", оскільки вона не може бути більше, ніж крутизна останньої утриманої гармоніки ряду:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2f_{g \max}}\right) \frac{\sin\left[2\pi f_{g \max} \left(t - n/2\pi f_{g \max}\right)\right]}{2\pi f_{g \max} \left(t - n/2\pi f_{g \max}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) \varphi_n(t) \quad (4)$$

По обидві сторони "розмитих" перепадів виникають викиди й пульсації з частотою, близькою до частоти першого відкинутого члену ряду.

Деяке покращання може дати збільшення числа членів ряду розкладання, хоча ніяких гарантій монотонного покращання ситуації з похибками відновлення не можна дати в принципі.. Для ілюстрації на рис. 9 та 10 наведені графіки розкладання в ряд з 11 членами та 21 членом.

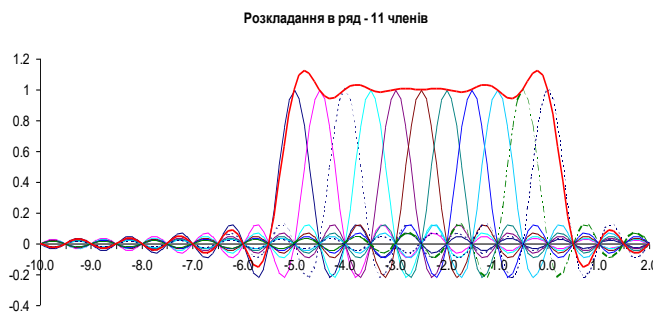


Рис. 9 Графіки 11 членів розкладання

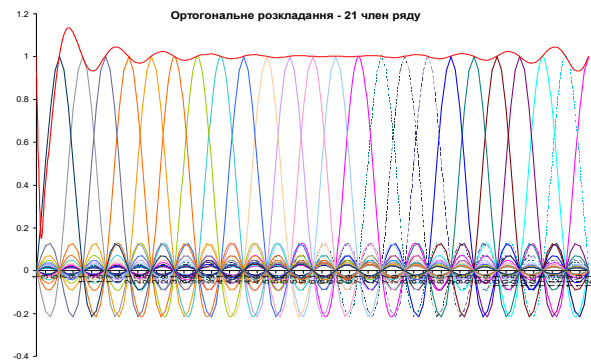


Рис. 10 Графіки 21 члену розкладання

Якщо частотний зсув між сусідніми членами ряду обирати рівною  $\Delta f = 1/\tau_p$ , умова теореми Котельникова не дотримується. Відповідно, ортогональність розкладання також не дотримується, хоча інваріантність до часового зсуву, обумовлена властивостями базисних функцій розкладання, зберігається [7 – 9]. Оскільки умова ортогональності не дотримується, бічні пелюстки парціальних спектрів перетинаються у точках, де їх значення є довільними та не дорівнюють нулю.

У повній відповідності з порушенням умов ортогональності підсумовування членів ряду дає незадовільні результати стосовно похибок відновлення сигналу.

Завершуючи графічний аналіз розкладання в ряд з різною строгістю дотримання умов теореми Котельникова, відмітимо, що ключовою вимогою є не стільки вибір якомога більшої частоти дискретизації, скільки дотримання цілочисельності співвідношень між частотою дискретизації та шириною основної та бічних пелюсток спектру сигналу [10]. Результати подальших досліджень похибок дискретизації та спектральної ефективності OFDM- сигналів будуть представлені у завершальній статті циклу.

**5. Висновки і перспективи подальших досліджень.**

1. У роботі проаналізовані практичні методи й особливості формування та застосування сигналів специфічного виду – OFDM-сигналів. Проблему, як і у попередній статті, розглянуто з позицій теорії радіотехнічних кіл та сигналів. Для безпроводових мереж та систем зв'язку такий підхід вважається найбільш теоретично обґрунтованим та перспективним. Завдяки йому з'являються можливості виводити рівняння та формули у замкненій формі, з використанням яких можна отримувати асимптотичні кількісні оцінки нев'язок відновлення сигналів. Ці підходи представляються вельми перспективними, тому що отримані за їх допомогою результати носять у певній мірі узагальнюючий характер і можуть давати кількісні характеристики їх потенціальної чутливості та стійкості.

2. На завершальному етапі досліджень планується розвинути регулярну теорію детермінованого та статистичного оцінювання спектральної ефективності ортогонального та квазіортогонального частотного розділення селективних каналів безпроводового зв'язку.

**Список використаних джерел**

1. Клобукова Л.П. Асимптотичні характеристики багатоканальних систем доступу з ортогональною фільтрацією // Л.П.Клобукова, А.І. Торошанко – К.: ДУТ, Зв'язок, №2. С. 32 – 40.
2. Bibi, N., Kleerekoper, A., Muhammad, N., & Cheetham, B. (2016). Equation-Method for correcting clipping errors in OFDM signals. SpringerPlus, 5(1). doi:10.1186/s40064-016-2413-0
3. Liu Y. (Ed.) Tensors for Data Processing: Theory, Methods, and Applications, 1st Edition. - Academic Press, 2021. – 596 p.
4. Nadal, J., Nour, C. A., & Baghdadi, A. Design and Evaluation of a Novel Short Prototype Filter for FBMC/OQAM Modulation. IEEE Access, 2018, 6, p. 19610–19625.
5. Lowery, A. J. (2020). Spectrally efficient optical orthogonal frequency division multiplexing. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 378(2169), 20190180. doi:10.1098/rsta.2019.0180 10.1098/rsta.2019.0180
6. Liu A. Peak-to-Average Power Ratio of Multicarrier Faster-Than-Nyquist Signals: Distribution, Optimization and Reduction. // Liu, A., Peng, S., Song, L., Liang, X., Wang, K., & Zhang, Q. - IEEE Access, 6, 2018. - p. 11977–11987.
7. Short Range Optical Wireless Theory and Applications / Mohsen Kavehrad, M. I. Sakib Chowdhury, Zhou Zhou - Publisher: Wiley, Year: 2016 - 288 p.
8. Sheikh J. A. Multicarrier Modulated Signal for Cognitive Radio with Low Peak-to-Average Power Ratio // Javaid A Sheikh, Mehboob ul Amin, Shabir A Parrah, G. Mohiuddin Bhat - International Journal of Applied Mathematics, Electronics and Computers, IJAMEC, 2016, 4(4), p. 113-120
9. Orthogonal frequency division multiplexing with power distribution index modulation // A.T. Dogukan and E. Basar - ELECTRONICS LETTERS, 15th October 2020 Vol. 56 No. 21 pp. 1156–1159.
10. Sarmiento, S., Altabas, J. A., Spadaro, S., & Lazaro, J. A. (2019). Experimental Assessment of 10Gbps 5G Multicarrier Waveforms for High-layer Split u-DWDM-PON-based Fronthaul. Journal of Lightwave Technology, 2019, p. 1–1.

**References:**

1. Klobukova L.P. Asymptotic characteristics of multi-channel access systems with orthogonal filtering // L.P. Klobukova, A.I. Toroshanko - K.: DUT, Zvyazok, No. 2. P. 32 - 40.
2. Bibi, N., Kleerekoper, A., Muhammad, N., & Cheetham, B. (2016). Equation-Method for correcting clipping errors in OFDM signals. SpringerPlus, 5(1). doi:10.1186/s40064-016-2413-0
3. Liu Y. (Ed.) Tensors for Data Processing: Theory, Methods, and Applications, 1st Edition. - Academic Press, 2021. – 596 p.

4. Nadal, J., Nour, C. A., & Baghdadi, A. Design and Evaluation of a Novel Short Prototype Filter for FBMC/OQAM Modulation. *IEEE Access*, 2018, 6, p. 19610–19625.
5. Lowery, A. J. (2020). Spectrally efficient optical orthogonal frequency division multiplexing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 378(2169), 20190180. doi:10.1098/rsta.2019.0180 10.1098/rsta.2019.0180
6. Liu A. Peak-to-Average Power Ratio of Multicarrier Faster-Than-Nyquist Signals: Distribution, Optimization and Reduction. // Liu, A., Peng, S., Song, L., Liang, X., Wang, K., & Zhang, Q. - *IEEE Access*, 6, 2018. - p. 11977–11987.
7. Short Range Optical Wireless Theory and Applications / Mohsen Kavehrad, M. I. Sakib Chowdhury, Zhou Zhou - Publisher: Wiley, Year: 2016 - 288 p.
8. Sheikh J. A. Multicarrier Modulated Signal for Cognitive Radio with Low Peak-toAverage Power Ratio // Javaid A Sheikh, Mehboob ul Amin, Shabir A Parrah, G. Mohiuddin Bhat - *International Journal of Applied Mathematics, Electronics and Computers, IJAMEC*, 2016, 4(4), p. 113-120
9. Orthogonal frequency division multiplexing with power distribution index modulation // A.T. Dogukan and E. Basar - *ELECTRONICS LETTERS*, 15th October 2020 Vol. 56 No. 21 pp. 1156–1159.
10. Sarmiento, S., Altabas, J. A., Spadaro, S., & Lazaro, J. A. (2019). Experimental Assessment of 10Gbps 5G Multicarrier Waveforms for High-layer Split u-DWDM-PON-based Fronthaul. *Journal of Lightwave Technology*, 2019, p. 1–1.