УДК 519.8 DOI: 10.31673/2412-4338.2022.030411

Мухін В.Є., Яковлева А.П., Корнага Я.І.
Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ КЕРУВАННЯ РЕАКТОРОМ ЕЛЕКТРОХІМІЧНОЇ ОБРОБКИ ПРОМИСЛОВИХ СТІЧНИХ ВОД

Анотація. *Розроблені математичні моделі зміни концентрації компонентів під дією електричного струму. Сформульована задача оптимального керування силою струму та витратами. Розроблені головні принципи розрахунку оптимального керування. Розглянуті методи розв'язку задачі ідентифікації параметрів моделі із застосуванням до даної задачі обробки промислових стічних вод. Розглянуто задачу оптимального управління струмом і витратою при обробці промислових стічних вод електрохімічним реактором установки ЕЛІОН.*

Математична формалізація цієї задачі полягає в розроблених моделях динаміки концентрації компонент. Запропоновано моделі кінетики першого порядку, які описують вплив сили струму та величини витрати на концентрацію. Модель для двох компонентів враховує взаємний вплив концентрацій цих компонентів один на одного і є нелінійною.

Проведено дослідження задачі оптимального управління на основі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна. Оптимальне керування – це вибір і здійснення найкращої програми дій для досягнення бажаного стану керованого об’єкта (виходячи з його певного початкового стану) впливом на параметри управління. Принцип максимуму Понтрягіна служить відправною точкою розв’язування багатьох теоретичних задач оптимального управління і розробки відповідних чисельних методів.

В результаті показано, що оптимальне управління має бути кусково-постійним і приймати в якомусь сенсі мінімальні або максимальне значення. Дані теоретичні дослідження підкріплені модельним прикладом, який показує, що кусочно-постійне управління більш прийнятне, ніж постійне. Отримані результати дозволяють побудувати досить ефективні методи вирішення задачі побудови оптимального управління, які допускають реалізацію на комп’ютері у реальному масштабі часу.

Ключові слова: *оптимальне керування, принцип максимуму, моделі динаміки, концентрація компонент, ідентифікація параметрів, мінімізація витрат, електрохімічний реактор, промислові стічні води*

Mukhin V.E., Yakovleva A.P., Kornaga Y.I.
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

MATHEMATICAL MODEL OF THE REACTOR CONTROL OF THE ELECTROCHEMICAL TREATMENT OF INDUSTRIAL WASTEWATER

Abstract. *Mathematical models of changes in the concentration of components under the action of an electric current have been developed. The problem of optimal control of current strength and costs is formulated. The main principles of optimal control calculation are developed. Methods of solving the problem of identification of model parameters with application to this problem of industrial wastewater treatment are considered. The problem of optimal control of current and consumption during the treatment of industrial wastewater with an electrochemical reactor of the ELION installation is considered.*

The mathematical formalization of this problem consists in the developed models of the dynamics of the concentration of components. First-order kinetics models are proposed, which describe the effect of current strength and flow rate on concentration. The model for two components takes into account the mutual influence of the concentrations of these components on each other and is non-linear.

The study of the problem of optimal control based on the principle of Pontryagin's maximum Optimal control is the selection and implementation of the best program of actions to achieve the desired state of the controlled object (based on its certain initial state) by influencing control parameters. Pontryagin's maximum principle serves as a starting point for solving many theoretical problems of optimal control and developing appropriate numerical methods.

As a result, it is shown that the optimal control should be piecewise constant and accept in some sense minimal or maximum value. These theoretical studies are supported by a model example, which shows that piecemeal-continuous management is more acceptable than permanent. The obtained results make it possible to build quite effective methods of solving the problem of building optimal control, which allow implementation on a computer in real time.

Keywords: *optimal control, maximum principle, dynamics models, component concentration, parameter identification, cost minimization, electrochemical reactor, industrial wastewater*

1. Постановка проблеми

На основі моделей динаміки концентрації компонент формулюється задача мінімізації витрат електроенергії при збереженні необхідного вихідного рівня концентрацій компонент. Нелінійність моделі динаміки ускладнює вирішення сформульованої задачі оптимального керування. Інтервал управління розбивається на невеликі підінтервали, кожному з яких управління передбачається постійним, диференціальні рівняння замінюються різницевими. В результаті формується задача математичного програмування досить великої розмірності, яку необхідно вирішити, зокрема, з використанням засобів комп'ютерної техніки.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Багато останніх досліджень присвячено вивченню керованих об'єктів, знаходженню найкращих способів управління ними, а також застосування методів оптимального керування до задач, що виникають в різноманітних сферах людської діяльності [1 – 6]. Математична теорія оптимального керування виникла не так давно. Центром її є принцип максимуму та пов'язані з ним дослідження, що проводиться вченими різних країн [7]. Більш глибоке вивчення цієї проблеми проведено в [8], де задача оптимального керування представлена як оптимізаційна задача на множині траєкторій деякого диференціального рівняння з багатозначною правою частиною – диференційне включення.

На основі описаних результатів запропоновані основні рекомендації щодо визначення оптимального управління силою струму і величиною витрати води, що протікає.

3. Мета і задачі дослідження

Об'єктом дослідження є управління фізико-хімічними процесами у реакторі електрохімічної обробки. Метою роботи є створення математичної моделі процесів керування реактором електрохімічної обробки промислових стічних вод та розробка методів розрахунку оптимального керування струмом та втратами води, що протікає через реактор. Ефективність застосування розроблених принципів управління дозволить зменшити витрати електроенергії при тому самому об'ємі оброблюваних вод.

4. Моделювання динаміки зміни концентрацій компонент

4.1.Рівняння динаміки концентрації одного компонента

Розглянемо модель реактора ідеального змішування. Відповідно до [1] рівняння матеріального балансу можна записати у вигляді

$$\dot{m} = \dot{m}_{\text{вх}} - \dot{m}_{\text{вых}} - \dot{m}_{\text{ос}} \quad (1)$$

де m - маса компонента в реакторі,

$m_{\text{вх}}$- вхідна маса,

$m_{\text{вих}}$- маса, що виходить з реактора

$m_{\text{ос}}$- маса, що виводиться в результаті діяльності реактора.

Нехай V - обсяг реактора, Q - витрата води, що протікає через реактор, $c_{\text{вх}}$ - концентрація компонента, що надходить в реактор, c - концентрація компонента в реакторі і на його виході (ця концентрація як і в [1] вважається однаковою). Тоді з (1) отримуємо:

$$\dot{c}V = c_{\text{вх}}Q - cQ - \dot{m}_{\text{ос}} \quad (2)$$

У [1] зазначено, що процес у реакторі йде з кінетикою першого порядку. Тому $\dot{m}_{\text{ос}} = km = kcV$, де k – константа швидкості кінетики.

Для цього реактора слід зв'язати $\dot{m}_{\text{ос}}$ із силою струму *I*. Покажемо, що k пропорційна *I*.

Розглянемо взаємодію частинок нейтралізатора (заліза) та компонента. Нехай частка заліза нейтралізує частину компонента з ймовірністю P.

Припустимо, що у розчині знаходиться N частинок компонента. Імовірність того, що буде використана 1 частка нейтралізатора, дорівнює $P = 1 - q^N$, де $q = 1 - p$.

Зазначимо, що $N \sim m$, а q можна подати у вигляді $q = e^{-\lambda_o}$, де $\lambda_o > 0$. Тому $P = 1 - e^{-\lambda m}$, де $\lambda > 0$- деяка константа

Якщо припустити, що m досить мале (реактор працює з малими концентраціями) отримуємо:

$$P \approx \lambda m \quad (3)$$

Математичне очікування кількості компонента, що виводиться 1 часткою нейтралізатора пропорційно Р (дійсно з імовірністю P або виводиться одна частка компонента, або жодна не виводиться). Тому, якщо за період t надійде $\overline{N}$ частинок нейтралізатора, то з урахуванням (3) маса, що виводиться, буде пропорційна:

$$\overline{N}P \approx \lambda\overline{N}m \quad (4)$$

Оскільки $\overline{N}$ пропорційна масі нейтралізатора $\overline{m}$, то з (4) маса, що виводиться, буде дорівнює $\mu_o\overline{m}\, m$, де $\mu_o > 0$ – константа.

За законом Фарадея $\overline{m} \sim It$, тому за час t буде виведено рівну масу μIm, де $\mu > 0$ — константа.

Звідси випливає, що швидкість виведення:

$$\dot{m}_{\text{ос}} = \mu Im \quad (5)$$

З (2) та (5) отримуємо рівняння

$$\dot{c}V = c_{\text{вх}}Q - CQ - \mu IcV \quad (6)$$

4.2.Рівняння динаміки концентрації двох компонентів

Розглянемо реактор, на вхід якого надходять дві різні речовини концентраціями $c_{\text{вх}}^i$, $i = 1{,}2$ c_i - концентрації даних компонент у реакторі та на його виході. Аналогічно (2) записуються рівняння:

$$c_iV = c_{\text{вх}}^iQ - c_iQ - \dot{m}_{\text{ос}}^i, ,i = 1{,}2 \quad (7)$$

де $m_{\text{ос}}^i$ – маса i-го компонента, що виводиться в результаті реакції.

Оскільки в даному випадку нейтралізатор впливає на обидві компоненти, то залежить не тільки від 1 компоненти, але і від 2 компоненти. Покажемо, що:

$$\dot{m}_{\text{ос}}^1 = \alpha_1c_1(\beta_1 - c_2)I, \quad (8)$$
$$\dot{m}_{\text{ос}}^2 = \alpha_2c_2(\beta_2 - c_1)I,$$

де $\alpha_i > 0$ $\beta_i > 0$ – константи.

Нехай одна частка нейтралізатора пов'язує одну частинку 1-го компонента з ймовірністю P_1, а 2-го компонента – P_2. Припустимо, що у розчині частинок 1-го компонента N_1 і частинок

2-го компонента N_2. Тоді ймовірність того, що 1 частка нейтралізатора пов'язує 1 частинку 1-ї речовини дорівнює:

$$P_1 = (1 - q_1^{N^1}) q_2^{N^2}, \text{ де } q_i = 1 - p_i$$

Як і при виведенні формули (3), отримуємо:

$$P_1 \approx \lambda_1 m_1 (1 - \lambda_2 m_2), \text{ де } \lambda_i > 0.$$

Математичне очікування кількості 1-ї речовини, що виводиться 1 часткою нейтралізатора пропорційно P_1. Звідси як і вище, ґрунтуючись на законі Фарадея, можна показати, що швидкість виведення маси 1-ї речовини дорівнює величині:

$$\mu \lambda_1 m_1 (1 - \lambda_2 m_2) I$$

або величині:

$$\alpha_1 c_1 (\beta_1 - c_2) I$$

Аналогічно швидкість виведення маси 2-го компонента дорівнює

$$\alpha_2 c_2 (\beta_2 - c_1) I,$$

де μ, α_i, β_i – відповідні позитивні константи.

З (7) та (8) отримуємо систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку концентрації двох компонентів.

$$\begin{cases} \dot{c}_1 V = c_{\text{вх}}^1 Q - c_1 Q - \alpha_1 c(\beta_1 - c_2) I \\ \dot{c}_2 V = c_{\text{вх}}^2 Q - c_2 Q - \alpha_2 c_2 (\beta_2 - c_1) I \end{cases} \tag{9}$$

4.3.Постановка задачі оптимального керування

Розглянемо випадок, коли в інтервалі $[O, T]$ відомі функції зміни вхідних концентрацій $c_{\text{вх}}^1(t)[t \in O, T]$. На основі рівнянь (9) сформулюємо задачу оптимального управління з керуючими параметрами (I, Q).

У якості критерія розглянемо функціонал:

$$\int_O^T I(t) dt \to min, \tag{10}$$

що дає економію електроенергії. Оскільки за час T слід очистити певний об'єм води, то є обмеження

$$\int_O^T Q(t) dt \geq a, \tag{11}$$

де $a > 0$ - константа. Як обмеження на вихідну концентрацію розглянемо такі

$$\int_O^T c_1(t) Q(t) dt \leq \delta_i, i = 1, 2, \tag{12}$$

де $\delta_i > 0$ константи. Обмеження (12) і є обмеження на загальну концентрацію компонентів, накопичену за період $[O, T]$. Крім перерахованих є природні обмеження управління:

$$I_{min} \leq I \leq I_{max}, \tag{13}$$

$$Q_{min} \leq Q \leq Q_{max}$$

Отже, приходимо до задачі оптимального управління (9) - (13).

4.4. Умови оптимальності струму і витрат при обробці промислових стічних вод

Для простоти розглянемо спочатку випадок, коли у воді, що надходить у реактор, присутні лише домішки та відсутні іони важких металів. Виходячи з вищесказаного, концентрація шкідливого компонента задовольняє наступне диференціальне рівняння:

$$\dot{c} = c_{\text{вх}}Q - cQ - cI,\ c(O) = c_0 \tag{14}$$

Розв'язується задача:

$$min \int_O^T I(t)dt \tag{15}$$

за умов

$$\int_O^T Q(t)dt \geq a, \qquad I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}, \tag{16}$$

$$\int_O^T c(t)Q(t)dt \leq \delta\ , \qquad Q_{min} \leq Q(t) \leq Q_{max}, \tag{17}$$

Ця задача є окремим випадком більш загальної задачі оптимального управління, яку сформулюємо нижче для випадку із закріпленим часом. Нехай потрібно мінімізувати функціонал:

$$\int_{t_0}^T f^0\,(x(t), u(t), t)dt \tag{18}$$

при умовах:

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), ,t_0 \leq t \leq T \\ x(t_0) = x_0, \\ q^i\big(x_0, x(T)\big) \leq O, , \ldots, ,i = 1m \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} q^i\big(x_0, x(T)\big) = O, , \ldots, ,= m + 1s \\ u = u(t) \in V, ,t_0 \leq t \leq T \\ u = (u^1, \ldots, u^r), ,x = (x^1, \ldots, x^n) \\ f = (f^1, \ldots, f^n). \end{gathered} \tag{20}$$

Ефективним методом дослідження задач оптимального управління є принцип максимуму Понтрягіна, що є необхідною умовою оптимальності в таких задачах [2]. Для формулювання принципу максимуму вводиться функція Гамільтона:

$$H(x, u, t, \psi, a_0) = -a_0 f^0(x, u, t) + \tag{21}$$

$$+\psi_1 f^1(x, u, t) + \ \ldots + \psi_n f^n(x, u, t).$$

Тут $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ - допоміжні змінні, що визначаються нижче.

Нехай $u = u(t)$ - кусочно-неперервне управління на відрізку $[t_0, T]$, $x(t)$ - розв'язок задачі, що відповідає цьому управлінню і початковій умові ставиться у відповідність наступна спряжена система лінійних диференціальних рівнянь щодо змінних:

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) :$$

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H(x,u,t,\psi(t),a_0)}{\partial x^i}\bigg|_{u=u(t), x=x(t)} \tag{22}$$

$$t_O \leq t \leq T$$

Сформулюємо теорему, що виражає принцип максимуму поставленої задачі.

<u>Теорема</u>. Нехай $x_0, u(t), x(t)$ - розв'язок задачі (19), (20). Тоді існують числа $a_0, a_1, \ldots, a_s$ та вектор-функція $\psi(t) = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big),\ \ t_0 \leq t \leq T$, такі що:

1)a = (a_0, …, a_s) $\neq$ 0, $a_0 \geq$ 0,…, $a_s \geq$ 0.

2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (22), яка відповідає розглянутому розв'язку;

3) $\sup\limits_{\substack{u \in V \\ t_0 \le t \le T}} H(x(t), u, t, \psi(t), a_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), a_0)$

4) $\psi_i(t_0) = \sum_{j=O}^{S} a_j g_{xi}^{j}(x_0, x(T)), ,i = 1, \ldots, n$

$a_j g^j\big(x_0, x(T)\big) = O, j = 1, \ldots, m.$

Застосуємо принцип максимуму до задачі (14 - 17). Для цього спочатку переформулюємо її у зручній формі. Позначимо:

$u_1 = I, u_2 = Q, x_1 = c\dot{x}_2 = u_2\dot{x}_3 = x_1 u_2$

Задача (14) - (17) запишеться таким чином:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = c_{\text{вх}} u_2(t) - x_1(t)u_2(t) - x_1(t)u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)u_2(t) \end{cases}, \tag{23}$$

$$min \int_O^T u_1(t)dt, \tag{24}$$

$$\begin{cases} a - x_2(T) \le O \\ x_3(T) - b \le O \end{cases}, \; \begin{matrix} x_1(O) = c_0 \\ ,x_2(O) = O \\ x_3(O) = O \end{matrix} \tag{25}$$

$V = \{u = (u_1, u_2) : \; u_{min}^1 \le u_1 \le u_{max}^1, u_{min}^2 \le u_2 \le u_{max}^2\},$

$n = 3, , , .r = 2s = 5m = 2$

Запишемо функцію Гамільтона для задачі (23) - (24)

$$\begin{aligned} H &= -a_0 u_1 + \psi_1(c_{\text{вх}} u_2 - x_1 u_2 - x_1 u_1) + \psi_2 u_2 + \psi_3 x_1 u_2 = \\ &= -(a_0 + \psi_1 x_1)u_1 + [(c_{\text{вх}} - x_1)\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 x_1)]u_2 \end{aligned} \tag{26}$$

Спряжена система (22) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x^1} = \psi_1(u_1 + u_2) + \psi_3 u_2 = \psi_1 u_1 + \\ (\psi_1 + \psi_3)u_2, \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x^2} = O \qquad \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x^3} = O \end{aligned} \tag{27}$$

Вже формула (26) дає деяку інформацію про структуру керуючого параметру: u_1 (або I) є кусково-сталою функцією зі значенням u_{min}^1 або u_{max}^1 (I_{min} або I_{max}), причому точки перемикання визначаються умовою$a_0 + \psi_1 x_1 = O$; для u_2 (або Q) це буде умова:

$$(c - x_1)\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 x_1 = O.$$

Тому необхідно досліджувати далі сполучену систему (27) та виписати умову 4 теореми. З останніх двох рівнянь (27) ясно, що $\psi_2 = const, \psi_3 = const$

Для системи (23)

$$\begin{aligned} g^1(x^0, x_T) &= a - x_2(T) \le O, \\ g^2(x^0, x_T) &= a_3(T) - b \le O, \\ g^3(x^0, x_T) &= x_1(O) - c_0 = O, \\ g^4(x^0, x_T) &= x_2(O) = O, \\ g^5(x^0, x_T) &= x_3(O) = O \end{aligned} \tag{28}$$

За умов доповнюючої нежорсткості в 4) маємо, що $a_1 \ge O; a_2 \ge O.$

Запис умов трансверсальності з 4) дає:

$$\psi_1(O) = a_3 \qquad \psi_1(T) = O$$

$$\psi_2(O) = a_4 \quad \psi_2(T) = -a_1 \tag{29}$$

$$\psi_3(O) = a_5 \qquad \psi_3(T) = a_2$$

Але оскільки $\psi_2 = const = a_4 = -a_1 \leq O a_5 = a_2 \geq O, \psi_3 = const = a_2$. Таким чином, з (27) та (29)

$$\psi_2 = c_2 \leq O; ,\psi_3 = c_3 \geq O$$

$$H = -(a_0 + \psi_1 x_1)u_1 + [(c_{\text{вх}} - x_1)\psi_1 + c_2 + c_3 x_1]u_2 = -\varphi_1(a_0, \psi_1, x_1)u_1 + +\varphi_2(c_{\text{вх}}, c_2, c_3, \psi_1, x_1)u_2.$$

Умова 3) теореми виконуватиметься при:

$$u_1 = \begin{cases} u_{min}^1, \varphi_1 > O \\ u_{max}^1, \varphi_1 < O \end{cases},$$

$$u_2 = \begin{cases} u_{max}^2, \varphi_2 > O \\ u_{min}^2, \varphi_2 < O \end{cases}.$$

Досліджуємо два випадки: 1) $a_0 = O$ 2)$a_0 \neq O$

1) Покажемо, що $\psi_1(t) \not\equiv O$. Справді, якщо це було б так, то, враховуючи вигляд ψ_1 з (27), (29)

$$\psi(t) = e^{(u_1+u_2)(t-t_1)}\psi(t_1) + \psi_3 \int_{t_1}^{t} e^{(t-\tau)(u_1+u_2)} d\tau, \quad t \in [t_o, t_1], t_1 \in [O, T], \psi(t_1) = O, \tag{30}$$

виконувалася б умова: $\psi_3 = c_3 - O$

Тоді $H = \psi_2 u_2$ досягає максимуму при $u_2 = u_{min}^2$, оскільки $\psi_2 < O$. Розглянемо друге рівняння з (23):

$$\dot{x}_2(t) = u_2(t)$$

$$x_2(O) = O$$

В цьому разі $x_2(T) = u_{min}^2 T = Q_{min} T$, що суперечить першій з умов (16). Оскільки $\psi(T) = O$, то доданки в (30) повинні бути різних знаків, і, оскільки $\psi_3 \geq O$, то $\psi(t_1) \leq O$, отже, функція ψ зростаюча недодатня. У такому разі $u_1 = u_1^{max}$ на всьому проміжку $[O, T]$. Таку ситуацію назвемо екстремальною.

2) З умови 1) теореми $a_0 > O$, тому наприкінці аналізованого проміжку, коли $\psi_1(t) \approx O$, u_1 має бути рівним u_{min}^1 . Тому в якийсь момент часу $t_1 \in [O, T]$ буде перемикання управління з u_{max}^1 на u_{min}^1

u_2 також матиме момент перемикання, проте не можна зробити висновок про його значення на початку та наприкінці проміжку керування.

4.5.Випадок двох компонентів

Нехай концентрації шкідливих компонентів $c_1(t)$ та $c_2(t)$ задовольняють наступній системі диференціальних рівнянь.

$$\begin{gathered} \dot{c}_1 = c_{\text{вх}}^1 Q - c_1 Q - \alpha_1 c_1(\beta_1 - c_2)I, \\ \dot{c}_2 = c_{\text{вх}}^2 Q - c_2 Q - \alpha_2 c_2(\beta_2 - c_1)I, \\ \dot{y} = Q \\ \dot{z}_1 = c_1 Q \\ \dot{z}_2 = c_2 Q \\ c_1(O) = c_1^0, , .c_2(O) = c_2^0 y(O) = z_1(O) = z_2(O) = O \end{gathered} \tag{31}$$

Вирішується задача:

$$min \int_O^T I(t)dt$$

з обмеженнями: $I_O \le I \le I_1, Q_O \le Q \le Q_1, y(T) \ge a, z_i(T) \le \delta_i$, $i = 1, 2$.

6. Висновки і перспективи подальших досліджень.

На основі моделі, що описує динаміку концентрації компонентів, та моделі, яка враховує вплив різних компонентів один на одного, сформульовано математичну задачу оптимального керування силою електричного струму та витрат. Застосовані принципи оптимального керування для розробки ефективного методу визначення оптимального керування, що допускає комп'ютерну реалізацію.

Проведено дослідження задачі оптимального управління на основі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна. В результаті показано, що оптимальне управління має бути кусково-постійним і приймати в якомусь сенсі мінімальні або максимальне значення. Дані теоретичні дослідження підкріплені модельним прикладом, який показує, що кусочно-постійне управління більш прийнятне, ніж постійне. Отримані результати дозволяють побудувати досить ефективні методи вирішення задачі побудови оптимального управління, які допускають реалізацію на комп’ютері у реальному масштабі часу.

Список використаних джерел:

1. Galyaev A.A. Problem of Optimal Oscillator Control for Nulling its Energy under Bounded Control Action // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 366-374.
2. Galyaev A.A. Scalar Control of a Group of Free-running Oscillators // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1511-1523.
3. Ovseevich A.I. Complexity of the Minimum-time Damping of a Physical Pendulum //SIAM J. Control Optim. 2014. V. 52. No. 1. P. 82-95
4. Бондарчук А.П. Модель взаємодії інформаційних систем в умовах конфлікту. Телекомунікаційні та інформаційні технології, (2017). (4), 34-41.
5. Бондарь А. Г. Математическое моделирование в химической технологии // К.: Вища школа, 1973. – 280 с.
6. Вишнівський В.В., Бондарчук А.П., Катков Ю.І., Сєрих С.О. Оцінка процесів функціонально-структурної реорганізації організаційно-технічної системи. Системи управління, навігації та зв’язку. Збірник наукових праць, (2018) №1(47), 44-47.
7. Понтрягін Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелідзе Р. В., Міщенко Е. Ф., «Математическая теория оптимальных процессов», Физмат, 1961 р.
8. Толбатов, А.В. Методологія створення автоматизованих систем керування [Текст] / А.В. Толбатов, В.Д. Черв`яков, Т.Л. Щербак // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки. — 2005. — №9(81). — С. 124-130.

References:

1. Galyaev A.A. Problem of Optimal Oscillator Control for Nulling its Energy under Bounded Control Action // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 366-374.
2. Galyaev A.A. Scalar Control of a Group of Free-running Oscillators // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1511-1523.
3. Ovseevich A.I. Complexity of the Minimum-time Damping of a Physical Pendulum //SIAM J. Control Optim. 2014. V. 52. No. 1. P. 82-95
4. Bondarchuk A.P. Model of interaction of information systems in conflict conditions. Telecommunications and information technologies, (2017). (4), 34-41.
5. Bondar A. G. Mathematical modeling in chemical technology // K.: Vyshcha shkola, 1973. – 280 p.
6. Vyshnivskyi V.V., Bondarchuk A.P., Katkov Yu.I., Serykh S.O. Evaluation of processes of functional and structural reorganization of the organizational and technical system. Control, navigation and communication systems. Collection of scientific papers, (2018) No. 1(47), 44-47.
7. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, "Mathematical theory of optimal processes", Fizmat, 1961.
8. Tolbatov, A.V. Methodology for creating automated control systems [Text] / A.V. Tolbatov, V.D. Chervyakov, T.L. Shcherbak // Bulletin of the Sumy State University. Series Technical sciences. — 2005. — No. 9(81). — P. 124-130.