

Виходцев Микита Миколайович

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ

ORCID 0009-0001-8194-7663

Золотухіна Оксана Анатоліївна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ

ORCID 0000-0002-3314-417X

Суханевич Євгеній Іванович

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ

ORCID 0009-0003-6631-829X

ВИКОРИСТАННЯ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ ДЛЯ СИМУЛЯЦІЇ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У 2D-ПРОСТОРИ

***Анотація.** У статті досліджується застосування клітинних автоматів для моделювання хвильових процесів у двовимірному просторі з метою їх потенційного використання у симуляції світлових ефектів для інтерактивних ігрових середовищ. Описано математичну модель, де для кожної клітинки визначаються висота та швидкість, які змінюються з часом залежно від стану сусідніх клітинок. Окрім того, кожній клітині назначається постійний масовий коефіцієнт, який дозволяє створювати різні види клітин, комбінуючи які, можна отримувати дуже складну поведінку клітинного автомата. Проведені експерименти підтвердили здатність моделі ефективно відтворювати хвильові явища, включаючи розповсюдження хвильового фронту, інтерференцію та згасання, що є ключовими характеристиками для реалістичної симуляції.*

Аналіз експерименту показав, що модель клітинного автомата може відтворювати хвильові процеси з високою візуальною точністю, завдяки локальній взаємодії клітинок, що дозволяє використовувати її симуляції хвильового процесу. Важливими аспектами роботи є гнучкість моделі у зміні параметрів, таких як маса клітинок та швидкість поширення хвиль, що дає змогу відтворювати різні фізичні процеси. Завдяки простій реалізації та гнучкості модель може бути адаптована для ігрових додатків.

Обговорено перспективи оптимізації моделі для ігрових середовищ, включаючи використання спрощеної сітки, кешування результатів та застосування багатопотокової обробки. Додатково розглянуто можливість інтеграції моделі з графічними шейдерами для реалізації складніших світлових ефектів.

Стаття підсумовує, що клітинні автомати мають значний потенціал для використання в ігрових додатках, особливо для інтерактивних симуляцій світлових та хвильових ефектів у режимі реального часу. Запропонована модель є перспективним інструментом для застосування у графічних ігрових середовищах завдяки її гнучкості, продуктивності та можливості масштабування.

***Ключові слова:** клітинний автомат, моделювання, хвильові процеси, графічні ефекти симуляція світла, ігрові додатки, інтерактивна симуляція, режим реального часу.*

Vykhodtsev Mykyta

State university of information and communication technologies, Kyiv

ORCID 0009-0001-8194-7663

Zolotukhina Oksana

Taras Shevchenko National University of Kyiv

State university of information and communication technologies, Kyiv

ORCID 0000-0002-3314-417X

Sukhanevich Evhenii*State university of information and communication technologies, Kyiv*

ORCID 0009-0003-6631-829X

USING CELLULAR AUTOMATA TO SIMULATE WAVE PROCESSES IN 2D SPACE

Abstract. *The paper investigates the use of cellular automata to model wave processes in two-dimensional space with the aim of their potential use in simulating lighting effects for interactive gaming environments. A mathematical model is described, where for each cell the height and velocity are determined, which change over time based on the state of neighboring cells. In addition, each cell is assigned a constant mass coefficient, which allows creating different types of cells, combining which can be used to obtain a very complex behavior of the cellular automaton. Experiments have confirmed the model's ability to reproduce wave phenomena, including wavefront propagation, interference, and attenuation, which are key characteristics for realistic simulations.*

The analysis of the experiment showed that the cellular automaton model can reproduce wave processes with high visual accuracy due to the local interaction of cells, which allows it to be used for simulating wave processes. An important aspect of the model is its flexibility in changing parameters, such as cell mass and wave propagation speed, which allows it to reproduce various physical processes. Due to its simple implementation and flexibility, the model can be adapted for gaming applications.

The prospects for optimizing the model for gaming environments are discussed, including the use of a simplified mesh, caching of results, and the use of multi-threaded processing. Additionally, the possibility of integrating the model with graphic shaders to realize more complex lighting effects is considered.

The paper concludes that cellular automata have significant potential for use in gaming applications, especially for interactive simulations of light and wave effects in real time. This model is a promising tool for use in graphical gaming environments due to its flexibility, performance, and scalability.

Key words: *cellular automaton, modeling, wave processes, graphic effects, light simulation, game applications, interactive simulation, real-time mode.*

1. Постановка проблеми

Симуляція фізичних явищ, таких як хвилі та світло, є актуальною темою для багатьох галузей – від наукових досліджень до комп'ютерної графіки та розробки ігор. Незважаючи на наявність [1] складних алгоритмів для відтворення цих ефектів, багато з них мають високі обчислювальні вимоги, що ускладнює їх застосування в реальному часі, особливо в інтерактивних середовищах, таких як ігри. Крім того, в умовах обмежених ресурсів, наприклад мобільних пристроїв, важливим є досягнення балансу між реалістичністю симуляції та ефективністю обчислень.

Клітинні автомати [2, 3], як прості моделі, що працюють за локальними правилами, дозволяють ефективно моделювати різноманітні природні явища [4, 5]. Їх застосування для симуляції хвиль можна вважати перспективним напрямом, завдяки здатності моделі відтворювати складну поведінку через прості локальні взаємодії клітин. Однак використання клітинних автоматів для моделювання хвиль і перевірка їх потенціалу для симуляції світлових ефектів потребує детального вивчення. Недостатньо вивченою залишається також можливість інтеграції цих моделей у складніші фізичні симуляції, зокрема в ігровому середовищі, які вимагають реалістичних ефектів при обмежених обчислювальних ресурсах.

Таким чином, дане дослідження спрямоване на вивчення можливостей клітинних автоматів для моделювання хвиль та оцінку придатності цієї моделі для симуляції світлових ефектів у двовимірному просторі ігрового середовища.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вивчення клітинних автоматів як моделі для симуляції фізичних процесів є предметом уваги науковців протягом кількох десятиліть. Перші теоретичні основи клітинних автоматів

були розроблені Станіславом Уламом і Джоном фон Нейманом ще в середині двадцятого століття, після чого модель отримала значне поширення завдяки її здатності генерувати складні патерни поведінки з простих локальних правил. Останнім часом дослідження у цій сфері набули нових аспектів, особливо у зв'язку з потребою в ефективних методах симуляції природних явищ, таких як хвилі, дифузія речовин і вогонь, у реальному часі.

У галузі симуляції хвиль клітинні автомати вже застосовувалися для моделювання коливань у рідинах [6], вітру, вогню [7], а також для імітації звукових хвиль. Одним із відомих підходів є використання так званих «вихрових» або «амплітудних» автоматів, які здатні ефективно описувати розповсюдження хвиль у двовимірному середовищі. Наприклад, роботи з моделювання водних хвиль з використанням клітинних автоматів показали, що такі моделі можуть створювати візуально реалістичні результати за незначних обчислювальних витрат, що є критичним у сфері комп'ютерної графіки та інтерактивних додатків.

З іншого боку, застосування клітинних автоматів для симуляції світлових хвиль вимагає адаптації моделі, оскільки поведінка світла, зокрема дифракція та заломлення, відрізняється від класичних хвиль у воді. Водночас роботи з моделювання світлових ефектів у двовимірному просторі з використанням клітинних автоматів досі обмежені. У сучасних дослідженнях [1][8] акцент часто ставиться на використанні складніших фізичних моделей, таких як метод трасування променів, які є обчислювально інтенсивними, що зменшує їхню застосовність у середовищах з обмеженими ресурсами.

Незважаючи на значні досягнення, залишається невирішеним питання ефективної симуляції світлових хвиль у двовимірних середовищах із використанням клітинних автоматів. Ця тема потребує подальшого дослідження і питання інтеграції таких симуляцій у реальні додатки, зокрема в ігровому середовищі, де необхідна висока швидкість обробки для забезпечення реалістичності ефектів у режимі реального часу. Це дослідження покликане заповнити цю прогалину, зокрема шляхом розробки та тестування нових моделей клітинних автоматів, здатних до симуляції хвиль із можливістю застосування їх для імітації світлових ефектів у двовимірному просторі.

3. Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є визначення можливостей клітинних автоматів для моделювання хвильових процесів та визначення придатності цієї математичної моделі для симуляції більш складних фізичних явищ у двовимірному просторі. Зокрема, дослідження спрямоване на аналіз потенціалу клітинних автоматів для симуляції світла і їх використання в ігровому середовищі, де важливо забезпечити реалістичність і високу продуктивність.

Для досягнення поставленої мети поставлено наступні задачі:

- ознайомитися з принципами функціонування клітинних автоматів, розглянути їх потенціал для моделювання хвиль та світлових ефектів;
- розробити математичну модель клітинного автомата, що імітує процеси коливання хвиль у двовимірному просторі;
- провести тестування моделі, щоб визначити візуальну точність симуляції у відтворенні хвильових явищ;
- проаналізувати модель, виокремити особливості поведінки моделі та визначити її потенціал для моделювання світлових ефектів в ігрових додатках;

4. Результати дослідження.

Клітинний автомат (КА) – це дискретна модель, що складається з сітки клітин, кожна з яких перебуває в одному з можливих станів і взаємодіє із сусідніми клітинами. Стан кожної клітини змінюється з часом, в залежності від поточного стану клітини та станів її сусідів, згідно з визначеним набором правил [2].

КА складаються з наступних компонентів:

1. Сітка (простір) – двовимірний простір клітин, де кожна клітина відповідає певній позиції в просторі. Для моделювання 2D-середовища зазвичай використовується квадратна або прямокутна сітка.

2. Стан клітини – кожна клітина може перебувати в одному з визначених станів. Стан клітини може відображати будь-яку фізичну властивість або значення, яке змінюється під час симуляції, наприклад, висота, швидкість або колір.

3. Правила переходу – набір правил, що визначає, як змінюється стан кожної клітини в залежності від станів її сусідніх клітин. Це є ключовим елементом у роботі клітинних автоматів. Наприклад, для моделювання поширення світла правила переходу можуть визначати, як світло поширюється від однієї клітини до іншої, залежно від інтенсивності сусідніх клітин та властивостей матеріалу.

4. Сусідство – множина клітин, які впливають на стан даної клітини. Найчастіше використовуються:

- сусідство фон Неймана – у клітини є 4 сусіди: зліва, справа, зверху, знизу (рис. 1);
- сусідство Мура – у клітини є 8 сусідів, зліва, справа, зверху, знизу та клітини по діагоналі (рис. 2);

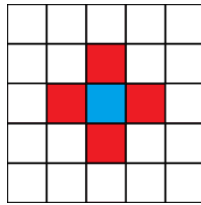


Рис. 1. Сусідство фон Неймана, червоні клітини є сусідами синьої клітини [9]

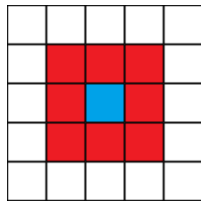


Рис. 2. Сусідство Мура, червоні клітини є сусідами синьої клітини [9]

Робота клітинного автомату відбувається в циклі. **Ініціалізація** – це початковий стан кожної клітини, який встановлюється згідно з певними умовами. На кожному кроці часу стан кожної клітини оновлюється в залежності від стану клітини та її сусідів, за правилами клітинного автомату. **Після чого ці кроки** повторюються, поки не буде досягнуто певної умови зупинки або поки не буде пройдено задану кількість кроків.

Для симуляції хвильового процесу в цьому дослідженні використовується сусідство фон Неймана, це означає, що у кожній клітині є 4 сусіди: зліва, зверху, справа та знизу. Це дозволяє відтворювати хвильову поведінку з урахуванням впливу сусідніх клітин.

Пропонується наступна математична модель для симуляції хвиль, яка передбачає дискретний час t та простір $N \times M$, де кожна клітинка $C_{i,j}$ має три основні параметри:

- $h_{i,j}(t)$ – висота клітини в момент часу t ,
- $v_{i,j}(t)$ – швидкість клітини в момент часу t ,
- $m_{i,j}$ – постійний масовий коефіцієнт клітини ($0 \leq m \leq 1$).

Правила оновлення для кожної клітини $C_{i,j}$ на кожному кроці часу:

1. Оновлення висоти клітини кожному кроці часу t (1):

$$h_{i,j}(t+1) = h_{i,j}(t) + v_{i,j}(t). \quad (1)$$

Рівняння (1) відображає, як висота клітини змінюється на кожному кроці часу, коли коливальна хвиля проходить через середовище. Таким чином, значення висоти клітинки залежить від її попередньої висоти і наявної швидкості. Це дозволяє моделювати рух хвилі, оскільки висота кожної клітинки змінюється відповідно до сили коливання, зумовленої швидкістю.

2. Оновлення швидкості кожної клітинки відбувається відповідно до різниці висоти між клітинкою та її чотирма сусідами (використовується сусідство фон Неймана). Для кожної клітинки $C_{i,j}$ на кожному кроці часу t швидкість обчислюється за допомогою виразу (2):

$$v_{i,j}(t+1) = \left(\frac{h_{i-1,j}(t) + h_{i+1,j}(t) + h_{i,j-1}(t) + h_{i,j+1}(t)}{4} - h_{i,j}(t) \right) * m_{i,j}. \quad (2)$$

Рівняння (2) означає, що швидкість кожної клітинки змінюється залежно від середньої висоти її сусідніх клітин порівняно з власною висотою. Масовий коефіцієнт $m_{i,j}$ відіграє роль корегувальника сили коливання клітини: чим ближче значення $m_{i,j}$ до нуля, тим менше клітинка реагує на зміни в середовищі, знижуючи амплітуду її коливань. Це дозволяє регулювати стійкість хвильового процесу та утримувати контроль над його розповсюдженням.

Використовуючи масовий коефіцієнт клітини, можна створити різні види клітин, наприклад невагомні клітини – $m_{i,j} = 1$, важкі клітині – $m_{i,j} = 0.5$ та повністю нерухомі клітини з $m_{i,j} = 0$. Комбінуючи клітини з різним масовим коефіцієнтом, можна отримувати дуже складну поведінку, яка відповідає характеристикам реального хвильового процесу.

Для оцінки точності моделі клітинного автомату було проведено експеримент, спрямований на відтворення хвильових явищ у двовимірному просторі. Було створено простір 600 на 600 клітин. Початкові параметри моделі включали значення для висоти та швидкості клітинок, а також маси, яка визначає їхню інертність (3):

$$\begin{cases} h_{i,j} = 0, v_{i,j} = 0, m_{i,j} = 0.9, & i, j \in [0,599] \\ m_{i,j} = 0, & i \in [0,225] \cup [250,350] \cup [375,599], j \in [100,110]. \end{cases} \quad (3)$$

Таке налаштування параметрів (висота, швидкість, маса) забезпечує формування різноманітних хвильових форм і дозволяє спостерігати ефекти, що виникають під час взаємодії хвиль з клітинками різної маси. А клітини, масовий коефіцієнт яких дорівнює 0, будуть відігравати роль бар'єру для хвильового фронту. Початкові умови та розподіл маси можуть створювати цікаві динамічні ефекти, наприклад посилення або пригнічення хвильових фронтів, а також формування інтерференційних картин.

На кожному кроці часу t задається значення швидкості $v_{i,j}$ клітин за формулою (4)

$$v_{i,50}(t) = \sin(t * 0.2) * 35, \quad \text{для всіх } i \in [100,499]. \quad (4)$$

Це налаштування буде створювати коливальний (хвильовий) процес на протязі всього експерименту, де коефіцієнт 0.2 визначає частоту коливань а коефіцієнт 35 – силу коливання.

У результаті експерименту була створена дифракція на двох щілинах (рис. 3), яка демонструє поведінку хвиль при обході перешкод, де:

– світлий колір клітини: вказує на клітини, де $h_{i,j} > 0$ – висота перевищує значення 0. Це означає, що в цих клітинках відбувається підвищення амплітуди хвилі, де в залежності від значення висоти клітини мають світліший або темніший колір (чим вище висота тим світліше,

чим нижче – темніше). Світлі області можуть відповідати точкам з високою концентрацією енергії, де хвиля підіймається вище певного порогу.

– чорний колір клітини: представляє клітинки, де $h_{i,j} \leq 0$ – висота менша за 0. Це означає, що в цих зонах хвиля має негативне значення амплітуди або знаходиться в стані спокою.

– червоний колір клітини: клітини з масовим коефіцієнтом $m_{i,j} = 0$. Такий коефіцієнт означає, що ці клітини не мають інертності, тобто не реагують на хвилю, і їхня висота не змінюється. Червоні клітинки виступають як фіксовані точки, що служать бар'єрами для хвильового процесу.

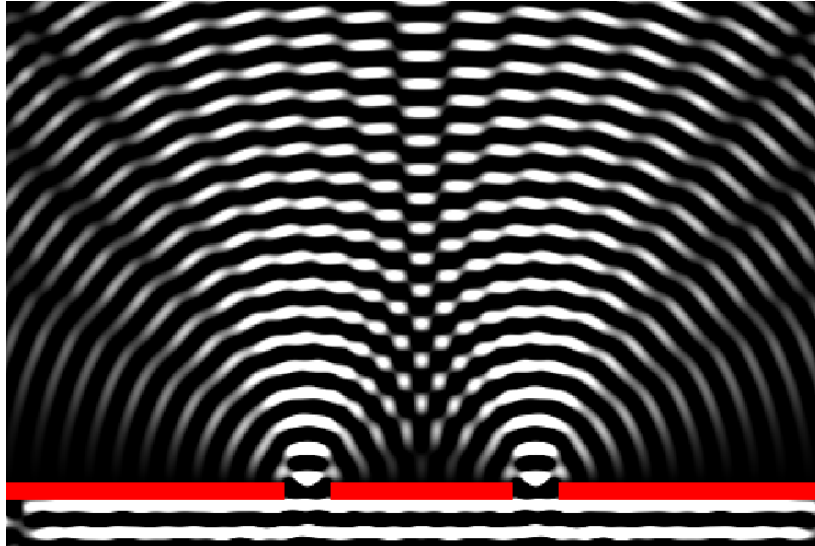


Рис. 3. Дифракція на двох щілинах, що отримана в результаті симуляції хвильового процесу у двовимірному просторі: світлі клітини представляють клітини $h_{i,j} > 0$, чорні – $h_{i,j} \leq 0$, а червоні клітинки мають масовий коефіцієнт $m_{i,j} = 0$.

На зображенні чітко демонструється ефект дифракція та інтерференція хвиль, що виникає через взаємодію хвиль, що пройшли через два отвори між червоними бар'єрами. Дифракція світла – ефект, коли хвильові фронти проходять чи огинають перешкоди та створюють рух хвиль в області за перешкодою, куди хвиля не може потрапити прямо. В області над червоною лінією чітко помітні зони інтерференції, де хвилі, що виходять з різних отворів, підсилюють або послаблюють одна одну, що призводить до створення темних і світлих областей. Цей малюнок є класичним прикладом інтерференції хвиль у двощілинному експерименті (рис. 4).

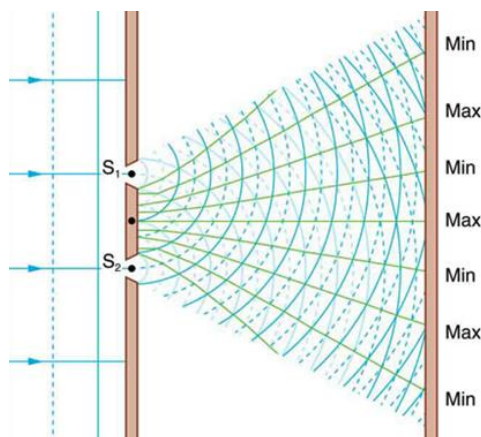


Рис. 4. Приклад інтерференції та дифракції хвиль у двощілинному експерименті [10]

Для визначення коректності відображення інтерференційної картини було взято значення висот клітин, які знаходять вертикально посередині рис.3, та побудовано графік (рис.5) на основі їх значень. На цьому графіку можна побачити хвилю яка стикається з бар'єром на 100 клітині, який не пропускає цю хвилю далі. Хвиля, проходячи через щілині між червоним бар'єром, розходиться далі у вигляді двох півкол, які стикаються між собою після 110 клітини, утворюючи ефект інтерференції.

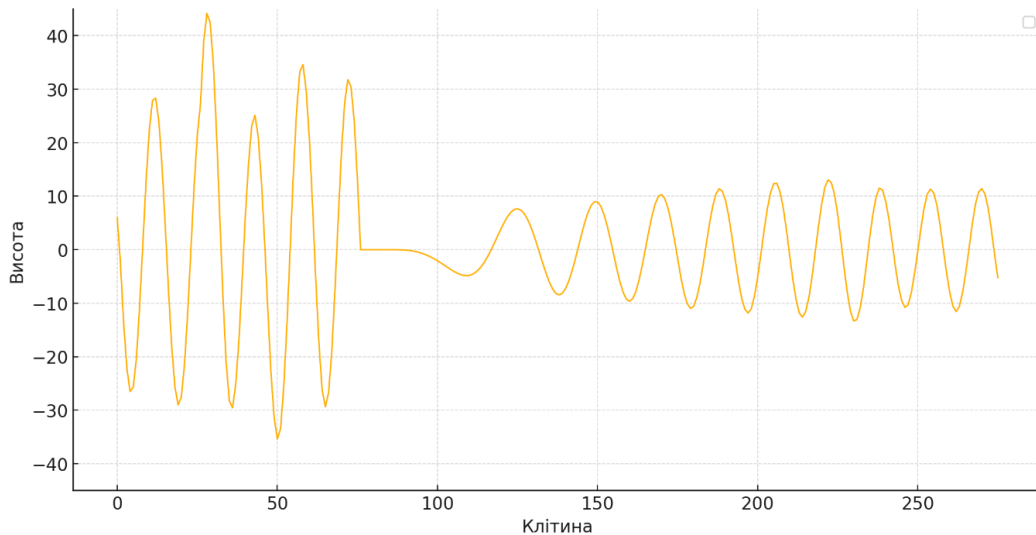


Рис. 5. Графік значення висот клітин, які знаходять вертикально посередині зображення, що є симуляцією дифракції на двох щілинах у двовимірному просторі (рис.3)

Правильне відтворення інтерференційних патернів вказує на те, що модель має достатню точність у відображенні складних хвильових процесів у реальному часі, а також її придатність для відтворення світлових ефектів. Основні особливості поведінки моделі:

1. Локалізована передача енергії – модель клітинного автомату передбачає, що зміни станів клітин відбуваються лише на основі станів їхніх сусідів. Це створює умови для локалізованої передачі енергії, що дозволяє точно відтворити поширення хвильового фронту без необхідності глобальних обчислень. Ця властивість забезпечує низькі обчислювальні витрати, що є перевагою при моделюванні в реальному часі.

2. Згасання амплітуди – завдяки коефіцієнту маси $m_{i,j}$, модель може регулювати амплітуду коливань клітинок, що дає можливість відтворювати затухання хвиль, яке схоже на природне згасання звукових або водяних хвиль. Ця особливість дозволяє ефективно контролювати довжину розповсюдження хвильового фронту.

3. Інтерференція – модель продемонструвала здатність відтворювати явища інтерференції, коли хвилі накладаються одна на одну, утворюючи посилені або ослаблені області коливань. Це схоже на світлові інтерференційні патерни, які виникають, коли хвилі перетинаються.

Модель клітинного автомату, розроблена для моделювання хвиль, має значний потенціал для застосування у симуляції світлових ефектів, зокрема завдяки її здатності створювати природні хвильові явища та контрольоване згасання. Однак, для моделювання світла, необхідно внести певні модифікації, щоб адаптувати модель до властивостей світлових хвиль, зокрема до їхньої швидкості, інтенсивності тощо.

Переваги використання розробленої моделі в ігрових середовищах:

1. Проста реалізації – алгоритм працює на локальних правилах оновлення стану кожної клітинки, де зміни висоти і швидкості залежать лише від сусідніх клітинок. Це дозволяє уникнути складних обчислень, що притаманні іншим фізичним моделям.

2. Легке масштабування – модель легко масштабується на різні розміри клітинної решітки, що дозволяє збалансувати якість графіки та продуктивність відповідно до можливостей апаратного забезпечення. Це забезпечує гнучкість моделі для різних типів пристроїв та налаштувань графіки.

3. Гнучкість параметрів – модель дозволяє змінювати такі параметри, як коефіцієнт маси клітинок, що регулює затухання хвиль, а також швидкість та амплітуду розповсюдження хвиль. Це корисно для створення різних типів візуальних ефектів, наприклад, для моделювання водяних або світлових хвиль із різною інтенсивністю.

Для забезпечення стабільної роботи моделі у реальному часі також можна буде застосувати оптимізаційні методи, що дозволять зменшити витрати на обчислення:

- Застосування спрощеної сітки – використання клітинок із більшими розмірами знижує деталізацію, але суттєво скорочує обсяг обчислень. Таке рішення підходить для створення великих хвильових ефектів або світлових променів, які не потребують високої точності.

- Попереднє кешування – частину стандартних значень висоти або швидкості клітинок можна попередньо обчислити і зберегти в пам'яті для прискорення обчислень під час виконання.

- Мультитрединг – алгоритм може бути оптимізований для паралельної обробки на графічних процесорах (GPU), що є важливим для досягнення продуктивної симуляції у режимі реального часу [11].

Модель може стати основою для відтворення реалістичних світлових ефектів. Зокрема, можливе використання цієї моделі для імітації таких ефектів, як відбиття світла на поверхнях, дифракція, поширення світла в напівпрозорому середовищі. Деякі аспекти моделі можуть бути додатково налаштовані для точнішої симуляції, наприклад, шляхом зміни схеми оновлення швидкості, щоб краще відтворювати швидкість поширення світлових хвиль. Для досягнення оптимальної продуктивності в реальному часі для інтенсивних світлових ефектів, може бути необхідна інтеграція цієї моделі з більш ефективними методами рендерингу, наприклад, шейдерами.

5. Висновки

У даній роботі було розглянуто можливості клітинних автоматів для симуляції хвильових процесів у двовимірному просторі та їх потенціал для моделювання світлових ефектів у ігрових додатках. Розроблена математична модель та правила оновлення клітин клітинного автомата забезпечують реалістичне відтворення основних характеристики хвиль, включно з поширенням хвильового фронту, згасанням амплітуди та інтерференцією.

Модель клітинного автомата продемонструвала здатність відтворювати хвильові процеси з високою візуальною точністю, що дозволяє використовувати її для реалістичної симуляції хвиль у 2D-середовищі. Можливість регулювання параметрів, таких як маса клітинок, дозволяє адаптувати модель до різних типів фізичних процесів, зокрема симулювання світлових ефектів. А використання оптимізаційних методів такі як спрощеної сітки, кешування та багатопотокових обчислень може забезпечити продуктивніше функціонування моделі на обмежених апаратних ресурсах, що є важливим для ігрових додатків.

Для підвищення точності та продуктивності моделі для моделювання різних фізичних явищ, перспективно провести такі додаткові дослідження:

- **Інтеграція з шейдерами** – використання графічних шейдерів для відтворення складніших світлових ефектів у реальному часі може значно розширити застосування моделі в ігровій графіці та візуалізації.

• Оптимізаційні методи – оптимізація алгоритму для паралельної обробки на GPU, що підвищить його продуктивність у реальному часі, а також на вдосконалення моделі для точнішої симуляції складних фізичних ефектів у двовимірному і тривимірному просторах.

• **Адаптація для 3D-простору** – хоча поточна модель розроблена для двовимірного середовища, її принципи можуть бути адаптовані до тривимірного простору, що дозволить симулювати більш складні фізичні явища та світлові ефекти для сучасних ігор та візуалізацій.

Таким чином, клітинні автомати мають значний потенціал для моделювання хвильових і світлових ефектів у двовимірних ігрових середовищах, а їх подальша оптимізація та розширення на тривимірні моделі відкриває нові можливості для реалістичної та ефективної симуляції фізичних явищ.

Список використаної літератури

1. Akenine-Möller T. Real-Time rendering [Електронний ресурс] / Tomas Akenine-Möller. – Fourth edition. | Boca Raton : Taylor & Francis, CRC Press, 2018. : A K Peters/CRC Press, 2018. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1201/b22086>.
2. Cellular Automata [Електронний ресурс] // Stanford Encyclopedia of Philosophy. – 2023. – Режим доступу до ресурсу: <https://plato.stanford.edu/entries/cellular-automata/>.
3. Wolfram S. A new kind of science / Stephen Wolfram. – United States : Wolfram Media, 2002. – 1197 с.
4. Chopard B. Cellular automata modeling of physical systems [Електронний ресурс] / Bastien Chopard // Encyclopedia of complexity and systems science. – New York, NY, 2009. – С. 865–892. – Режим доступу: https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_57.
5. Tsompanas M. Cellular automata implementation of Oregonator simulating light-sensitive Belousov–Zhabotinsky medium / Michail-Antisthenis Tsompanas., 2021. – (Nonlinear Dynamics).
6. Steinmann C. Fluid dynamics simulation using cellular automata [Електронний ресурс] / Christian Steinmann, Günter Bischof // ResearchGate. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/285056252_Fluid_Dynamics_Simulation_Using_Cellular_Automata.
7. Forsyth T. Cellular automata for physical modelling [Електронний ресурс] / Tom Forsyth // Github. – Режим доступу: https://tomforsyth1000.github.io/papers/cellular_automata_for_physical_modelling.html.
8. Marschner S. Fundamentals of Computer Graphics / S. Marschner, P. Shirley., 2021. – 716 с. – (A K Peters/CRC Press).
9. Cellular automaton [Електронний ресурс] // Wikipedia – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Cellular_automaton.
10. Urone P. P., Hinrichs R. Douglas College Physics 1207. BCcampus Open Education Pressbooks, 2020.
11. Efficient simulation execution of cellular automata on GPU [Електронний ресурс] / Daniel Cagigas-Muñiz [та ін.] // Simulation modelling practice and theory. – 2022. – Т. 118. – С. 102519. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2022.102519>.
12. Бондарчук А. П., Олейніков І. А., Бажан, Т. О. Застосування методів машинного навчання до управління 3D принтером. Телекомунікаційні та інформаційні технології, 2024, № 1, с. 4-15.