

УДК 621.391

Климаш М.М., Кайдан М.В., Стрихалюк Б. М.

Національний університет «Львівська політехніка»

ТЕНЗОРНА МОДЕЛЬ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ КРИВОЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Klymash M.M., Kaidan M.V., Strykhalyuk B.M. Tensor model of telecommunication network based on curvilinear coordinates. The tensor model of the telecommunications network using the differential geometry were proposed. Various coordinate systems in the network, depending on certain parameters were considered. For assisted covariant differentiation described the possibility of taking into account changes in the state based on the Christoffel symbols. Differential form presented to simplify the calculations Christoffel symbols, Riemann, Richie tensors, scalar curvature of space. As an alternative to covariant derivatives we propose to use the derivatives of Li. We propose to use metric tensor based on the cosine theorem where the vector values are selected the load of a given vector. We show that according to the proposed model the metric tensor is not symmetric. For the research purpose it is worth decomposing the metric tensor to symmetric and asymmetric tensors. We demonstrate the examples of determining the metric tensor, Christoffel symbol and Li derivative.

Keywords: the metric tensor, Christoffel symbols, Li derivative, Riemann tensor, Richie tensor, scalar curvature of space, network conditions, load

Климаш М.М., Кайдан М.В., Стрихалюк Б.М. Тензорна модель телекомунікаційної мережі на основі криволінійної системи координат. Запропоновано тензорну модель дослідження телекомунікаційної мережі з використанням диференціальної геометрії. Приведено диференціальні форми для спрощення розрахунків символу Крістоффеля, тензорів Рімана, Річі, скаляр кривизни простору. Показано, що для проведення досліджень метричний тензор доцільно розкласти на симетричний і антисиметричний тензори. Наведено приклади визначення метричного тензора, символу Крістоффеля, похідної Лі.

Ключові слова: метричний тензор, символ Крістоффеля, похідна Лі, тензор Рімана, тензор Річі, скаляр кривизни простору, стан мережі, навантаження

Климаш М.Н., Кайдан Н.В., Стрихалюк Б. М. Тензорная модель телекоммуникационной сети на основе криволинейной системы координат.

Предложено тензорную модель исследования телекоммуникационной сети с использованием дифференциальной геометрии. Приведены дифференциальные формы для упрощения расчетов символа Кристоффеля, тензоров Римана, Ричи, скаляр кривизны пространства. Показано, что для проведения исследований метрический тензор целесообразно разложить на симметричные и антисимметричные тензоры. Проведено примеры определения метрической тензора, символа Кристоффеля, производной Ли.

Ключевые слова: метрический тензор, символ Кристоффеля, производная Ли, тензор Римана, тензор Ричи, скаляр кривизны пространства, состояние сети, нагрузка

1. Вступ. Сучасна телекомунікаційна мережа розвивається швидкоплинно, що приводить до систематичного ускладнення її аналізу та математичного апарату. Разом з тим адекватно математично такі мережі можна описати за допомогою тензорного аналізу з використанням диференціальної геометрії. Представлення передачі даних у вигляді мережі простору з розглядом криволінійного підпростору шляхів дає можливість описувати поведінку різних параметрів, наприклад навантаження в досліджуваній мережі [1]. Диференціальна залежність стану мережі від кількості даних на шляхах дозволяє дослідити її динамічну поведінку у будь-якому випадку [2]. В певний момент часу стану мережі відповідає певна точка в досліджуваному геометричному просторі. Всі зміни стану телекомунікаційної мережі, які можуть спостерігатися є окіл навколо цієї точки. Очевидно, що з часом навантаження у мережі буде змінюватися, отже і буде змінюватися і стан мережі. Існує досить велика кількість публікацій, наприклад [3-6], де тензорна модель розглядається для телекомунікаційної мережі. В цих роботах система координат не є криволінійною і змінюються лише параметри, наприклад навантаження, час, або пропускна здатність.

Отже, актуальним є впровадження тензорної моделі для проведення дослідження телекомунікаційної мережі з використанням диференціальної геометрії.

2. Основні параметри тензорного представлення в мережі для різних систем координат. Введемо систему координат, що відображає m -мірне поле, де кожна точка відповідає певному стану телекомунікаційної мережі. Навантаження, що передається в кожному i -му каналі відобразатиметься компонентою x^i , де $i=1, \dots, m$. Центр системи координат O характеризує випадок, коли навантаження не спостерігається на всіх каналах. Орти e_i мають одиничну довжину, яка може служити загальноприйнята, 1 біт або 1 байт, або відповідати мінімальному значенню обміну даними в системі, що здійснюється при вказаній дискретності.

Розглянемо радіус-вектор \mathbf{r} , який з огляду геометричного відображення, проведений від центру системи координат до заданої точки, що відповідає стану мережі, і визначається

$$\mathbf{r} = x^i e_i. \quad (1)$$

Крім контраваріантних складових x^i , існують коваріантні x_i , які є ортогональними компонентами \mathbf{r} і визначаються як

$$x_i = \mathbf{r} e_i. \quad (2)$$

Зв'язок коваріантних і контрваріантних компонентів записують у вигляді [1]:

$$x_i = e_i e_j x^j, \quad x^j = g^{ij} x_j. \quad (3)$$

де g_{ij} – метричний коваріантний тензор.

Очевидно, що крім репера $\{e_1, \dots, e_m\}$ існує ортогональний йому репер $\{e^1, \dots, e^m\}$, який можна отримати за допомогою (3). Метричний контрваріантний тензор визначається як

$$g^{ij} = e^i e^j, \quad (4)$$

який аналогічно (3) може піднімати індекс

$$x^i = g^{ij} x_j. \quad (5)$$

Загалом стан мережі представляється довжиною радіуса-вектора, і може бути визначений одночасно в коваріантній і контрваріантній систем координат в квадратичній формі:

$$\mathbf{r}^2 = x^i x_j = g_{ij} x^i x^j = g^{ij} x_i x_j. \quad (6)$$

Враховуючи (6) зміна стану записується у вигляді

$$(\mathbf{dr})^2 = dx^i dx_j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j. \quad (7)$$

Слід зазначити, що стан мережі не має залежати від системи координат, яку розглядаємо, тоді величина радіусу-вектора є інваріантна.

Одночасно є доцільно розглядати різні системи координат, наприклад в новій системі координат навантаження в i -му каналі позначимо компонентою q^i . Стан мережі можна визначати за допомогою компонент x^i і q^i , які пов'язані один з одним і в загальному випадку можна представити, як $x^i(\mathbf{r}) = x^i(q^1, \dots, q^m)$, або $q^i(\mathbf{r}) = q^i(x^1, \dots, x^m)$.

Останні функції є взаємно обернені і визначаються якобіаном перетворення

$$\det \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right| \neq 0, \quad \det \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right| \neq 0, \quad (8)$$

які є оберненими.

Будемо вважати, що розглянуті функції в роботі мають достатній клас гладкості таким чином, що всі диференційовані функції не рівні нулю, зокрема $\partial \mathbf{r} / \partial x^i \neq 0$ і $\partial \mathbf{r} / \partial q^i \neq 0$.

Прикладами, коли необхідно розглядати одночасно різні системи координат, є випадки:

1) одна система складена з вхідних і вихідних навантажень на вузли (нехай це навантаження x^i), інша система координат є коли q^i відповідає навантаженню на гілках або транзитних вузлах;

2) координати x^i відповідають навантаженню на каналах, q^i координати навантаження вузлів і контурів;

3) навантаження віртуальних каналів у системи координат x^i , а q^i відповідає каналам фізичного рівня;

4) для координати x^i навантаження у розмірностях в байтах або бітах, тоді як q^i може розглядатися як кількість пакетів, або кількості блоків для OBS (Optical burst switching) [7].

Крім навантаження, зазначені системи координат може розглядатися час передачі даних між вузлами, пропускна здатність в каналі та інше.

Можна розглядати системи координат з іншим центром системи координат O' , яка відповідає точці початкового стану мережі, коли почались проводитись спостереження за мережею в певний початковий момент часу τ_0 . Для такої системи координат радіус-вектор \mathbf{e} \mathbf{r}' , який проведений від O' до точки, що відповідає стану мережі. Очевидно, що з геометричної точки зору радіуси-вектори пов'язані: $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \overline{OO'}$.

Взаємозв'язок між реперами для різних систем координат визначаємо за допомогою якобіанів перетворення таких як (8), або для прикладу для коваріантних представимо перехід

$$\mathbf{e}_i(x) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}_j(q) \frac{\partial q^j}{\partial x^i}, \quad (9)$$

де орти $\mathbf{e}_i(x)$ та $\mathbf{e}_j(q)$ відповідають системам координат, в яких навантаження на каналах x та q , відповідно. Водночас метричний тензор з врахуванням (9) визначається як

$$g^{ij}(x) = \mathbf{e}^i(x) \mathbf{e}^j(x) = \mathbf{e}^s(q) \mathbf{e}^k(q) \frac{\partial q^s}{\partial x^i} \frac{\partial q^k}{\partial x^j} = g^{sk}(q) \frac{\partial q^s}{\partial x^i} \frac{\partial q^k}{\partial x^j}, \quad (10)$$

де аналогічно (8) у дужках зазначені параметри відповідають системам координат, в яких навантаження на каналах x або q .

Очевидно, що (6) і (7) для іншої системи координат будуть мати вигляд

$$\mathbf{r}^2 = q^i q_j = g_{ij}(q) q^i q^j = g^{ij}(q) q_i q_j, \quad (11)$$

$$(d\mathbf{r})^2 = dq^i dq_j = g_{ij}(q) dq^i dq^j = g^{ij}(q) dq_i dq_j. \quad (12)$$

Далі замість x^i і q^i будемо позначати r^i , x_i і $q_i = r_i$, а часткові похідні $\partial/\partial x^i$ і $\partial/\partial q^i$, як $\partial/\partial r_i$.

Ведемо додатковий параметр, лінійна зміна навантаження протягом часу відносно всіх каналів в точці стану мережі:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \frac{\partial (r^i \mathbf{e}_i)}{\partial \tau} = \frac{\partial r^i}{\partial \tau} \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \tau} r^i = u^i \mathbf{e}_i, \quad (13)$$

де модуль зміни навантаження вздовж осі \mathbf{e}^i визначається:

$$u_i = \frac{\partial r^i}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \tau} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial r^i}{\partial r^k} + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial r^k} \mathbf{r} \right) \frac{\partial r^k}{\partial \tau}.$$

Для випадку, коли орти систем координат не залежать від часу, тобто $\partial \mathbf{e}^i / \partial \tau = 0$, тоді (13)

спрощується:
$$\mathbf{u} = \frac{\partial (r^i \mathbf{e}_i)}{\partial \tau} = \frac{\partial r^i}{\partial \tau} \mathbf{e}_i = u^i \mathbf{e}_i.$$

3. Похідні та диференціювання в тензорному аналізі для телекомунікаційної мережі.

Співвідношення (7), (12) та (13) відповідають за зміну стану мережі. У загальному випадку така зміна відбувається систематично і повинна здійснювати зміну перерозподілу навантаження у каналах. В новому стані мережі внаслідок зміни потоків виникає взаємний вплив між каналами та перерозподіл навантаження між ними. В [1] пропонується використовувати другі часткові похідні \mathbf{r} :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial r^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^j} = \mathbf{r}_{ij}. \quad (14)$$

Величини \mathbf{r}_{ij} можуть бути розкладені по всіх існуючих компонентам $k=1, \dots, m$, що визначають вплив одночасної взаємодії каналів через зміну кількості навантаження у мережі. Отже, \mathbf{r}_{ij} можна розкласти по векторам локального репера \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k, \quad (15)$$

де Γ_{ij}^k – коефіцієнт зв'язності, або символи Крістофеля. При зміні навантажені у мережі саме коефіцієнт зв'язності дозволяє описати оптимальний перерозподіл навантаження в каналах.

Враховуючи, що

$$\mathbf{e}^k \mathbf{e}_m = \delta^k_m, \quad (16)$$

де δ – символ (тензор) Кронекера, тоді помноживши \mathbf{e}^k на (15), отримаємо символ Крістофеля другого роду

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial r^j} = \mathbf{e}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r^k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^j} = \mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial r^i} = \mathbf{e}^k \partial_i \mathbf{e}_j. \quad (17)$$

Враховуючи, властивості метричного тензора опускати чи піднімати індекс, наприклад (3) та (4), помноживши (17) отримаємо символ Крістофеля першого роду:

$$\Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_k \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{e}_k \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial r^j} = \mathbf{e}_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r^k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^j}. \quad (18)$$

З (17) та (18) бачимо, що символ Крістофеля симетричний по індексам i та j , тобто вплив перерозподілу навантаження з i -го каналу на j -й канал і навпаки є однаковим при зміні навантаження на k -му каналі.

Похідна $\partial \mathbf{e}^i / \partial_j \neq 0$, коли розглядаються криволінійні системи координат і реperi можуть змінюватися за напрямком. Крім того, розглядаючи мережу із пріоритетом можливі випадки, коли навантаження з меншим пріоритетом буде затримано або одночасно перенаправлено в інший канал. Аналогічно важливим є розгляд систем координат на основі фізичного рівня і віртуального зв'язку між вузлами, коли канал фізичного рівня в певний момент часу відповідає одному каналу віртуального зв'язку, а пізніше іншому віртуальному каналу. В розглянутих прикладах похідна $\partial \mathbf{e}^i / \partial_j$ є фактично зміною у часі. Водночас, коли одна система координат є вхідне і вихідне навантаження на вузлах, а інша система – розподілене навантаження на гілках, то фактично (8) є незмінним.

При зміні навантаженні, тобто стану мережі, спостерігається зміна радіуса-вектора. Величину зміни параметра в загальному випадку визначають за допомогою коваріантного диференціювання:

$$D\mathbf{r} = \partial_k \mathbf{r} dr^k = \partial_k (r^i \mathbf{e}_i) dr^k = (\mathbf{e}_i \partial_k r^i + r^i \partial_k \mathbf{e}_i) dr^k.$$

В першому доданку німі індекси можемо перейменувати, а в другому доданку врахуємо (14) і (15) отримаємо:

$$D\mathbf{r} = \left(\mathbf{e}_j \partial_k r^j + r^i \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial r^i \partial r^k} \right) dr^k = \left(\mathbf{e}_j \partial_k r^j + r^i \mathbf{e}_j \Gamma_{ik}^j \right) dr^k = \mathbf{e}_j \left(\partial_k r^j + r^i \Gamma_{ik}^j \right) dr^k = \mathbf{e}_j (D_k r^j) dr^k = \mathbf{e}_j D r^j. \quad (19)$$

де $D r^j$ – коваріантний диференціал; $D_k r^j$ – коваріантна похідна, яка вже для r_j буде мати вигляд

$$D_k r^j = \left(\partial_k r^j - r^i \Gamma_{jk}^i \right). \quad (20)$$

Опускання чи піднімання індексів параметрів під коваріантним диференціалом здійснюється з використанням теореми Річі $D_k g_{ij} = 0$ або $D_k g^{ij} = 0$. Звернемо увагу, що після коваріантного диференціювання отримується тензор.

Зміну навантаження протягом часу тепер можна представити у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_i (D_k r^i) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}, \quad \mathbf{u}^i = \left(\partial_k r^i + r^j \Gamma_{jk}^i \right) \frac{\partial r^k}{\partial \tau}.$$

Нехай спочатку стан мережі змінився на малу величину $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i (D_k r^i) dr^k$, після чого вже змінився на $\mathbf{c} = \mathbf{e}_i (D_m (r^i + a^i)) dr^m = \mathbf{e}_i (D_m (r^i + (D_k r^i) dr^k)) dr^m$, якщо зміна стану на початку є на величину $\mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i (D_m r^i) dr^m$, а потім $\mathbf{d} = \mathbf{e}_i (D_k (r^i + b^i)) dr^k = \mathbf{e}_i (D_k (r^i + (D_m r^i) dr^m)) dr^k$, згідно рис. 1.

Визначимо, на скільки відрізняється радіус-вектор від послідовності змін стану:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{e}_i (D_m D_k - D_k D_m) r^i dr^k dr^m = \mathbf{e}_i R_{j, mk}^i r^j dr^k dr^m, \quad (21)$$

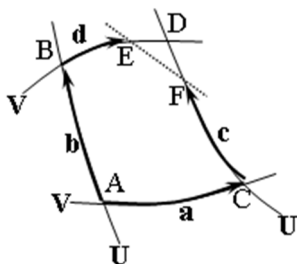


Рис. 1. Зміна послідовності кореляції стану мережі у криволінійній системі координат

де $R^i_{j,mk}$ – тензор Рімана або тензор кривизни, який визначають за допомогою символів

$$\text{Крістофеля: } R^i_{j,mk} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial t^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{jm}}{\partial t^k} + \Gamma^i_{pm} \Gamma^p_{jk} - \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{jm}. \quad (22)$$

В (21) враховано, що $(D_m D_k - D_k D_m) r^i = R^i_{j,mk} r^j$. Зазначимо, що вектори \mathbf{d} та \mathbf{c} отримані внаслідок паралельного переносу векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} , відповідно.

Співвідношення (21) визначає наскільки зміна станів комутують між собою. Якщо всі компоненти тензора Рімана рівні нулю, то (21) також рівний нулю, значить зміна станів комутують між собою і всі коваріантні похідні також комутують, а простір є евклідовим.

Тензор Рімана з (21) та (22) визначає наскільки вектор зміни стану відрізняється при його перенесенні по нескінченно малому замкнутому контуру. Чим більша кривизна і площа, тим більше змінюються компоненти, тобто залежить наскільки різкими є перепади стану мережі.

Представлені співвідношення є вірними в межах ріманової геометрії, коли нижня пара індексів у символі Крістофеля є симетричною, інакше в (21) необхідно врахувати доданок

$$(\Gamma^p_{mk} - \Gamma^p_{km})(\partial_p r^i + \Gamma^i_{jp} r^j) = 2\Gamma^p_{mk}(\partial_p r^i + \Gamma^i_{jp} r^j), \text{ де } \Gamma^p_{mk} = 0,5(\Gamma^p_{mk} - \Gamma^p_{km}) - \text{тензор кручення.} \quad (23)$$

Зміну симетричного метричного тензора, в ріманівській геометрії можна визначити за допомогою потоку Річі: $\frac{dg_{(ij)}}{dt} = -2R_{ij}$, де $R_{ij} = g_{kp} R_{ki,pj}$ – тензор Річі, який відповідає

згорнутому, наприклад по першому і по третьому індексу тензору Рімана. При проведенні додаткової згортки отримуємо скаляр кривизни простору $R = g_{ij} R_{ij}$.

Кількість компонент символів Крістофеля і тензора Рімана досить швидко зростає із збільшенням розмірності простору. Використовуючи диференціальні форми спрощується визначення цих параметрів. Тензор Рімана можна визначити за допомогою структурного рівняння Картана:

$$d\omega^i + \omega^i_p \wedge \omega^p = 0,5 R^i_{j,mk} \mathbf{dr}^m \wedge \mathbf{dr}^k. \quad (24)$$

де \mathbf{dr}^i – це градієнт, а не диференціал, причому $\mathbf{dr}^i = e^i$, ще одне позначення векторів взаємного базиса; позначення (d) – відповідає операції зовнішнього диференціювання; (\wedge) – косий (зовнішній) добуток.

Наприклад, для вектора 1-форми по базису \mathbf{dr}^i : $\mathbf{a} = a_i \mathbf{dr}^i$ зовнішнє диференціювання визначається, як

$$d\mathbf{a} = da_i \wedge \mathbf{dr}^i = \partial_j a_i \mathbf{dr}^j \wedge \mathbf{dr}^i. \quad (25)$$

Представлені 1-форми пов'язані метричним тензором і зв'язністю

$$\omega_i = g_{ij} \mathbf{dr}^j, \quad \omega^i = g^{ij} \omega_j \mathbf{dr}^i, \quad \omega_{ij} = \Gamma_{i,jk} \mathbf{dr}^k, \quad \omega^i_j = g^{ip} \omega_{pj} = \Gamma^i_{jk} \mathbf{dr}^k. \quad (26)$$

Слід зазначити, що тензор Рімана може бути також визначений за допомогою подвійного коваріантного зовнішнього диференціювання (21).

Альтернативою зовнішнього диференціювання є похідна Лі L_v вздовж векторного поля V

$$\text{від тензор } U^i_{jk\dots}: \quad (L_v U)^i_{jk\dots} = \left. \frac{dU^i_{jk\dots}}{dv} \right|_{v=0}, \quad (27)$$

де векторне поле визначається як $\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dv} = V^j(r^1, r^2, \dots, r^n) \frac{\partial}{\partial r^j}$.

$$\text{Похідною Лі від вектора є дужки Лі: } (L_v U)^i = V^j \partial_j U^i - U^j \partial_j V^i = ([\mathbf{V}, \mathbf{U}])^i. \quad (28)$$

Для проведення коваріантної похідної необхідно мати значення символів Крістофеля за допомогою яких проводяться паралельні перенесення тензорів. Похідна Лі не потребує зв'язності, а паралельне перенесення визначає вздовж інтегральної кривої любого фіксованого векторного поля. Так на відміну від коваріантної похідної визначеної для прикладу представленому в (21) та рис. 1, для похідної Лі можна виразити:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = L_v U \mathbf{dr}(v) \mathbf{dr}(u) = [\mathbf{V}, \mathbf{U}] \mathbf{dr}(v) \mathbf{dr}(u), \quad (29)$$

де вектори \mathbf{a} та \mathbf{d} відповідають зміщенню стану у векторному полі $V^i(r^1, r^2, \dots, r^n)$, а вектори \mathbf{b} та \mathbf{c} у векторному полі $U^i(r^1, r^2, \dots, r^n)$.

Векторні поля, для яких дужка Лі (29) рівні нулю називають координатними. З точки зору наших досліджень, похідна Лі $L_V U$ може розглядатися, як визначення інваріантної похідної по заданому векторному полі V від тензорного поля U при зміні стану мережі.

Для зміни навантаження протягом часу за допомогою похідної Лі визначається, як

$$L_V u = (v^j - u^j) D_j D_k \Gamma^i \frac{\partial \Gamma^k}{\partial t}$$

4. Практична реалізації криволінійної системи координат в телекомунікаційній мережі. Для телекомунікаційної мережі базисні вектори визначатимемо:

$$e_i = \mathbf{r}(i) / |\mathbf{r}(i)|, \quad (30)$$

де $\mathbf{r}(i)$ – вектор навантаження між вузлами на i -му віртуальному каналі зв'язку; $|\mathbf{r}(i)| = r^i$ – модуль вектора навантаження, тобто кількість навантаження, яке перебуває в мережі і передається, наприклад від вузла А до В.

Метричний тензор визначається за допомогою (3) і з врахуванням (30) отримаємо:

$$g_{ij} = e_i e_j = \mathbf{r}(i) \mathbf{r}(j) / (|\mathbf{r}(i)| |\mathbf{r}(j)|) = \cos \gamma, \quad (31)$$

де γ – кут між векторами $\mathbf{r}(i)$ та $\mathbf{r}(j)$.

Для векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} , що на рис. 2а, визначимо компоненту метричного тензора

$$g_{ab} = \cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2) / 2ab. \quad (32)$$

Важливо зазначити, що вектори між вузлами А та В є різними $|\mathbf{AB}| \neq |\mathbf{BA}|$, тому $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, а $\mathbf{BA} = \mathbf{c}'$ і $g_{ab} \neq g_{ba}$, де вектори \mathbf{c} та \mathbf{c}' є направленими в протилежні напрямки відносно один одного. Прийmemo, що при визначенні g_{ab} згідно (32) вибирається вектор \mathbf{c} для якого початком вектора є спільна точка з вектором \mathbf{a} , а кінцем спільна точка з вектором \mathbf{b} .

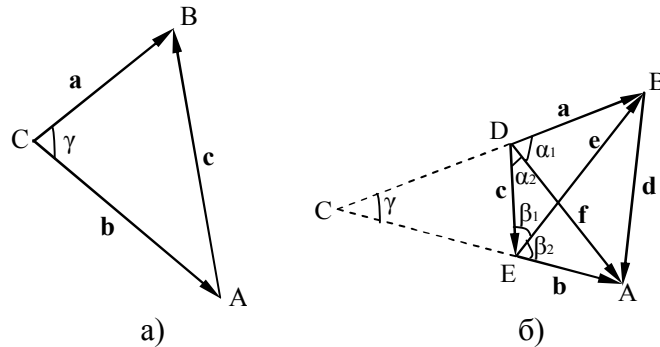


Рис. 2. Визначення кута між векторами: а) спільна точка; б) вектори не мають спільних точок

Складніше є визначення метричного тензора, коли вектори \mathbf{a} та \mathbf{b} не мають спільних точок (рис. 2б). Зауважимо, що тут розглядається віртуальне навантаження між різними вузлами, хоча на фізичному рівні розглянуті вектори можуть мати транзитні спільні вузли. Кут $\gamma = 180^\circ - \angle CDE - \angle CED$, але враховуючи, що $\angle CDE = 180^\circ - \alpha$ і $\angle CED = 180^\circ - \beta$, тоді $\gamma = \alpha + \beta - 180^\circ$, де $\alpha = \angle EBD$, $\beta = \angle AED$. Тоді

$$g_{ab} = \cos \gamma = \cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = -\cos(\alpha + \beta) = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos \alpha \cos \beta + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = g_{ac} g_{cb} - \sqrt{1 - g_{ac}^2} \sqrt{1 - g_{cb}^2}. \quad (33)$$

З останнього співвідношення не враховувався вектор \mathbf{d} , а враховувати лише вектор \mathbf{c} , ставить необхідність накладати нам ще додаткові умови, коли треба розглядати саме вектор \mathbf{c} , а коли \mathbf{d} . Для уникнення зазначених складнощів, для визначення g_{ab} з врахуванням навантаження у \mathbf{c} та \mathbf{d} пропонується визначати спочатку $\cos \alpha$ та $\cos \beta$ і з рис. 2б видно, що $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ та $\beta = \beta_1 + \beta_2$, тоді аналогічним чином, як в (33) маємо:

$$g_{ac} = g_{af} g_{fc} - \sqrt{1 - g_{af}^2} \sqrt{1 - g_{fc}^2}, \quad g_{cb} = g_{cf} g_{fb} - \sqrt{1 - g_{cf}^2} \sqrt{1 - g_{fb}^2}, \quad (34)$$

Тепер отримані значення підставляємо у (33) і отримаємо g_{ab} для випадку рис. 2б.

Як бачимо метричний тензор не є симетричний, а отже може бути розкладений на симетричний $g_{(ab)}$ і антисиметричний $g_{[ab]}$ компоненти

$$g_{ab} = g_{(ab)} + g_{[ab]}. \quad (35)$$

Представлені в попередньому пункті формули у більшості випадків відповідають випадку коли метричний тензор є симетричний. Наприклад, символ Крістофеля $\Gamma_{k,ij}$ є несиметричний по парі індексів i та j , розкладається на симетричний $\Gamma_{k,(ij)}$ та антисиметричний $\Gamma_{k,[ij]}$ (тензор кручення T^p_{mk}) по даній парі, які визначаються з врахуванням (18):

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,(ij)} + \Gamma_{k,[ij]} = 0,5(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ji}); \quad (36)$$

$$\Gamma_{k,(ij)} = 0,5(\partial_i g_{(jk)} + \partial_j g_{(ki)} - \partial_k g_{(ij)}); \quad \Gamma_{k,[ij]} = 0,5(\partial_i g_{[jk]} + \partial_j g_{[ki]} - \partial_k g_{[ji]}).$$

Розглянемо для прикладу елементарну мережу складену з трьох вузлів представлену на рис. 2а. Матимемо шість векторів навантаження \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{a}' , \mathbf{b}' та \mathbf{c}' і шість базисних векторів \mathbf{e}_a , \mathbf{e}_b , \mathbf{e}_c , $\mathbf{e}_{a'}$, $\mathbf{e}_{b'}$ та $\mathbf{e}_{c'}$, які визначаються за допомогою (30). Штриховані вектори на рис. 2а не представлені і відповідають протилежному напрямку між вузлами відносно нештрихованого вектора.

Стан мережі визначається

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}) + \mathbf{r}(\mathbf{b}) + \mathbf{r}(\mathbf{c}) + \mathbf{r}(\mathbf{a}') + \mathbf{r}(\mathbf{b}') + \mathbf{r}(\mathbf{c}') = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a + |\mathbf{b}| \mathbf{e}_b + |\mathbf{c}| \mathbf{e}_c + |\mathbf{a}'| \mathbf{e}_{a'} + |\mathbf{b}'| \mathbf{e}_{b'} + |\mathbf{c}'| \mathbf{e}_{c'}. \quad (37)$$

де порівнюючи з (1) маємо $r^i = |\mathbf{r}(\mathbf{i})| = |\mathbf{i}| = i$. Зауважимо, що базисні вектори не співпадає з векторами представленими на рис. 2а.

Метричний тензор для мережі рис. 2а можна представити у матричному вигляді 6×6 , тобто

$$g_{ii} = 1; \quad g_{ii'} = -1; \quad g_{ij} = (i^2 + j^2 - k^2)/2ij, \quad (38)$$

де індекс i відповідає вектору направленому протилежно вектору \mathbf{i} , а величина k відповідає навантаженню вектора, який згідно рис. 2а розташований між векторами \mathbf{i} та \mathbf{j} .

Враховуючи (26) та (37) для форм зв'язності ω_{ij} маємо

$$\omega_{ij} = 0,5(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \mathbf{dr}^k = \Gamma_{i,jk} \mathbf{dr}^k. \quad (39)$$

У нашому випадку всі діагональні компоненти $\omega_{ii} = 0$, отже символи Крістофеля з однаковими першими двома індексами рині нулю $\Gamma_{i,im} = 0$, також $\omega_{ii'} = 0$, тоді $\Gamma_{i,i'm} = 0$, де індекс m відповідає будь-якому вектору. Для інших випадків $\omega_{ij} = (i^2 - j^2 + k^2)/2i^2 j \mathbf{di} + (-i^2 + j^2 + k^2)/2ij^2 \mathbf{dj} - k/2ij \mathbf{dk}$ і враховуючи (24) отримуємо $\Gamma_{i,iji} = (i^2 - j^2 + k^2)/2i^2 j$, $\Gamma_{i,ijj} = (-i^2 + j^2 + k^2)/2ij^2$, $\Gamma_{i,ijk} = -k/2ij$, $\Gamma_{i,ijj} = 0$, $\Gamma_{i,ijk} = 0$, $\Gamma_{i,iji} = 0$. Далі для визначення символів Крістофеля другого роду використовується метричний контрваріантний тензор $\Gamma^i_{jk} = g^{ip} \Gamma_{p,jk}$, який визначається як

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}},$$

де $g = \det|g_{ij}|$ - визначник метричного коваріантного тензора. Тепер вже за допомогою (24)-(26) визначається тензор Рімана.

Користуючись (3) можна визначити коваріантні компоненти, які наприклад для вектора $r_i = 6a^2 - a'^2 + (-b^2 + b'^2 + c^2 - c'^2)/2a$. Далі використовуючи (32) отримуємо: $g^{ij} = ((r^i)^2 + (r^j)^2 - (r^k)^2)/2g^i r^j$.

Оскільки метричний тензор не є симетричний, то в (28) для дужок Лі необхідно врахувати додатковий доданок із символів Крістофеля

$$(L_{\mathbf{v}} \mathbf{U})^i = (V^j \partial_j U^i - U^j \partial_j V^i) + (V^j U^k \Gamma^i_{kj} - U^j V^k \Gamma^i_{jk}) = ([\mathbf{V}, \mathbf{U}])^i.$$

Так похідна Лі вздовж векторного поля \mathbf{a} від векторного поля \mathbf{b} визначається:

$$L_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + ab(\Gamma^i_{ab} - \Gamma^i_{ba}) \mathbf{e}_i = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + 2ab \Gamma^i_{[ab]} \mathbf{e}_i, \quad (40)$$

де похідні визначались за допомогою допоміжної функції, наприклад антисиметричного метричного тензора $g_{[ab]}$ і з врахуванням властивостей похідної оберненої функції

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial g_{[ab]}} \frac{\partial g_{[ab]}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}.$$

Враховуючи зміст (29) і порівнюючи з (40), зауважимо, що зміна стану мережі внаслідок кореляції послідовностей між векторами \mathbf{a} та \mathbf{b} визначається різницею цих векторів і антисиметричним символом Крістофеля другого роду по нижній парі індексів $\Gamma^i_{[ab]}$.

5. Висновки. Для аналізу стану мережі запропоновано тензорну модель дослідження телекомунікаційної мережі з використанням диференціальної геометрії. За допомогою коваріантного диференціювання описано можливість врахування зміни стану на основі символу Крістофеля, який характеризує вплив кожної компоненти мережі один на одного. Розглянуто диференціальні форми для спрощення розрахунків символу Крістофеля, тензорів Рімана, Річі, скаляр кривизни простору та похідні Лі, як альтернатива коваріантним похідним. Запропоновано визначати метричний тензор на основі теореми косинусів, де значення векторів вибирається, як навантаження заданого вектора. Показано, що метричний тензор не є симетричний і для проведення досліджень його необхідно розкласти на симетричний і антисиметричний тензори.

Література

1. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей / И.И. Пасечников. – Москва: Машиностроение-1, 2004. – 216 с.
2. Стрихалюк Б.М. Підвищення ефективності динамічної маршрутизації у гетерогенних сервісно-орієнтованих системах з використанням гіперболічних потоків Річі / Б.М. Стрихалюк, Ю.В. Клиماش, І.Б. Стрихалюк, Б.В. Коваль // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Радіоелектроніка та телекомунікації : збірник наукових праць. – 2015. – № 818. – С. 189–194
3. Лемешко А.В. Результаты исследования тензорной модели многопутевой маршрутизации с обеспечением качества обслуживания в телекоммуникационных сетях / А.В. Лемешко, О.Ю. Евсеева, С.В. Гаркуша // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2013. – № 4, том 13. – С. 38-54.
4. Клиماش М.М. Тензорне подання алгоритмів маршрутизації / М.М. Клиماش, Б.М. Стрихалюк, М.В. Кайдан // Зв'язок. – 2010. – №1. – С.33-35.
5. Стрелковская И. В. Исследование характеристик качества систем сложной структуры с применением тензоров на основе декомпозиции / И.В. Стрелковская, И.Н. Соловская, Г.Г. Смаглюк // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 3 (8). – С. 47-57.
6. Кайдан М.В. Тензорна модель системи зв'язку фотонної транспортної мережі / М.В. Кайдан, М.М. Клиماش // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2014. – №3(31). – С. 10-13
7. Klymash M. Performance analysis of optical burst switching networks for different signaling protocols / M. Klymash, M. Kaidan, S. Dumych, T. Maksymyuk // Smart Computing Rewiew. – 31 October 2015. – Vol.5, No.5. – P. 378-387.

Автори статті

Клиماش Михайло Миколайович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри телекомунікацій, Національний університет «Львівська політехніка». Тел.: +380 (50) 431 98 07. E-mail: mklimash@lp.edu.ua.

Кайдан Микола Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри телекомунікацій, Національний університет «Львівська політехніка». Тел.: +380 (98) 263 15 34. E-mail: kaidan_k@mail.ru.

Стрихалюк Богдан Михайлович – доктор технічних наук, доцент кафедри телекомунікацій, Національний університет «Львівська політехніка». Тел.: +380 (93) 920 06 98. E-mail: bogdan_str@ukr.net.

Authors of the article

Klymash Mykhailo Mykolayovych – doctor of sciences (technical), professor, head of telecommunications department, Lviv Polytechnic National University. Tel.: +380 (50) 431 98 07. E-mail: mklimash@lp.edu.ua.

Kaidan Mykola Volodymyrovych – candidate of sciences (technical), associate professor of telecommunications department, Lviv Polytechnic National University. Tel.: +380 (98) 263 15 34. E-mail: kaidan_k@mail.ru.

Strykhaluk Bohdan Mykhailovych – doctor of sciences (technical), associate professor of telecommunications department, Lviv Polytechnic National University. Tel.: +380 (93) 920 06 98. E-mail: bogdan_str@ukr.net.

Дата надходження
в редакцію: 13.07.2016 р.

Рецензент:
доктор технічних наук, професор Л.Н. Беркман
Державний університет телекомунікацій