

УДК 621.316

Любчик В. Р., докт. техн. наук; Сенчишина Ю. В., аспірант;
Троцишин І. В., докт. техн. наук; Розорінов Г. М., докт. техн. наук

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРІОДИЧНОГО СИГНАЛУ З ПРЯМОКУТНИМ СПЕКТРОМ І МІНІМАЛЬНИМ ПІК-ФАКТОРОМ

Lyubchik V. R., Senchyshyna Yu. V., Trotsyshyn I. V., Rozorinov H. M. Mathematical model of a periodic signal with a rectangular spectrum and minimum crest-factor. The method of finding of mathematical model of radio signal with rectangular spectral envelope and minimum crest-factor got further development. A method consists in the successive finding of values of initial phases of harmonic signals along the line of minimums of crest-factors, here the first signal is a reference signal. A method allows to find the great number of initial phases for the arbitrary number of harmonic constituents. A mathematical model can be utilized for the synthesis of telecommunication signals, for the tasks of radio probing, measuring of parameters, and others like that.

Keywords: harmonics, rectangular spectrum, crest-factor, the initial phase, the radiosignal

Любчик В. Р., Сенчишина Ю. В., Троцишин І. В., Розорінов Г. М. Математична модель періодичного сигналу з прямокутним спектром і мінімальним пік-фактором. Дістав подальшого розвитку метод знаходження математичної моделі радіосигналу з прямокутною обвідною спектру та мінімальним пік-фактором. Метод полягає у послідовному знаходженні значень початкових фаз гармонічних сигналів вздовж лінії мінімумів пік-факторів, при цьому перший сигнал є опорним. Метод дозволяє знаходити множину початкових фаз для довільної кількості гармонічних складових. Математична модель може бути використана для синтезу телекомунікаційних сигналів, для задач радіозондування, вимірювання параметрів, тощо.

Ключові слова: гармоніка, прямокутний спектр, пік-фактор, початкова фаза, радіосигнал

Любчик В. Р., Сенчишина Ю. В., Троцишин И. В., Розорин Г. Н. Математическая модель периодического сигнала с прямоугольным спектром и минимальным пик-фактором. Получил дальнейшее развитие метод нахождения математической модели радиосигнала с прямоугольной огибающей спектра и минимальным пик-фактором. Метод заключается в последовательном нахождении значений начальных фаз гармонических сигналов вдоль линии минимумов пик-факторов, при этом первый сигнал является опорным. Метод позволяет находить множество начальных фаз для произвольного числа гармонических составляющих. Математическая модель может быть использована для синтеза телекоммуникационных сигналов, для задач радиозондирования, измерения параметров, и тому подобное.

Ключевые слова: гармоника, прямоугольный спектр, пик-фактор, начальная фаза, радиосигнал

1. Вступ та постановка задачі

Використання багаточастотного фазового методу вимірювання відстаней до багатьох об'єктів потребує проведення зондування гармонічними сигналами із деяким кроком по частоті в заданому діапазоні частот. Проте послідовне синтезування, зондування та вимірювання параметрів гармонічних сигналів призводить до значних витрат часу на проведення одного циклу вимірювань. Тоді як швидка зміна радіолокаційної обстановки або необхідність швидкого проведення вимірювань, потребують проведення паралельних вимірювань одночасно на усіх частотах. Для подолання вказаної проблеми доцільним є використання сигналів із прямокутною обвідною спектра.

2. Аналіз літературних даних

Відомі сигнали з прямокутним спектром, які є шумоподібними [1]. Проте, з точки зору вимірювання дальності об'єктів багаточастотним фазовим методом більш доцільним є знаходження аналітичного виразу сигналу з прямокутною обвідною амплітудного спектру із детермінованим розташуванням спектральних складових. Гармоніки такого сигналу повинні бути розташовані дискретно з певним кроком в діапазоні частот від 0 до ω_B . В загальному вигляді такий сигнал можна записати наступними виразами:

$$s(t) = \cos(\omega t) + \sum_{n=2}^N \cos(n\omega t + \phi_{in}) \quad (1)$$

$$s(t) = \cos(\omega t) + \sum_{n=2}^N \cos(n\omega t + \phi_{in}) \quad (2)$$

де ω – кутова частота, $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \phi_{in}$ – зсув фаз відповідно другої, третьої та n -ї гармонічних складових сигналу $S(t)$.

3. Основна частина

Розглядаючи графік такого сигналу наприклад для п'яти гармонік, видно що такий сигнал має значний пік-фактор. Це суттєво обмежує енергетичні можливості сигналу, тому як максимум сигналу значно переважає середньоквадратичне значення. Для зменшення пік-фактору пропонується змінювати початкові фази кожної гармонійної складової [1-4].

Сигнал є сумою гармонічних складових, які мають власну частоту і початковий зсув фази. Здійснюючи послідовну зміну значень фазових зсувів $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{in}$ гармонічних складових сигналу $s(t)$ з частотами $2\omega \dots n\omega$ за усіма значеннями з кроком $\Delta\phi$, ми можемо знайти із всього переліку сигналів, сигнали з прямокутним спектром і мінімальним пік – фактором. Із усієї сукупності значень пік-факторів обираємо найменше.

Розглянемо сигнал $S(t)$, який складається з 5-и гармонічних складових. Він має вигляд:

$$s(t) = \cos(\omega t) + \sum_{n=2}^5 \cos(n\omega t + \phi_{in}) \quad (3)$$

При зміні початкових фаз змінюється форма сигналу. На зміну пік-фактору впливає зміна фазового зсуву сигналу $s(t)$. При нульових значеннях фазових зсувів всіх гармонік сигналу $s(t)$ пік-фактор дорівнює 3.1579.

Графік сигналу $s(t)$ без зміни початкової фази гармонічних складових представлений на Рис. 1.

Якщо взяти той самий сигнал $s(t)$ і змінити початкові фази усіх гармонік на 90° , пік-фактор такого сигналу змінився з 3.1579 до 2.8289. Графік сигналу зі зміною початкової фази останньої гармонійної складової представлений на Рис. 2.

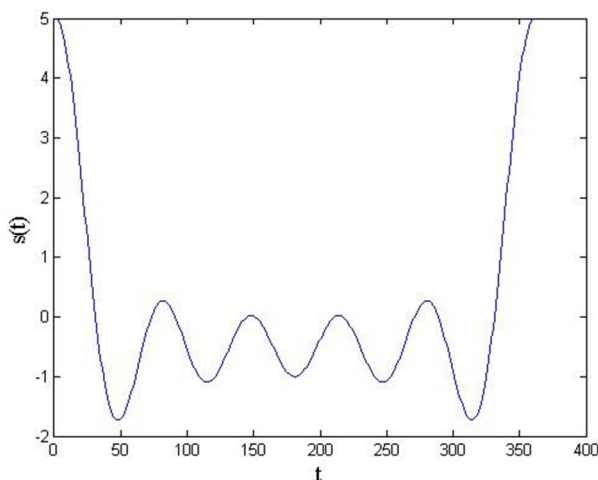


Рис. 1. Сигнал $s(t)$ без зміни початкової фази гармонік

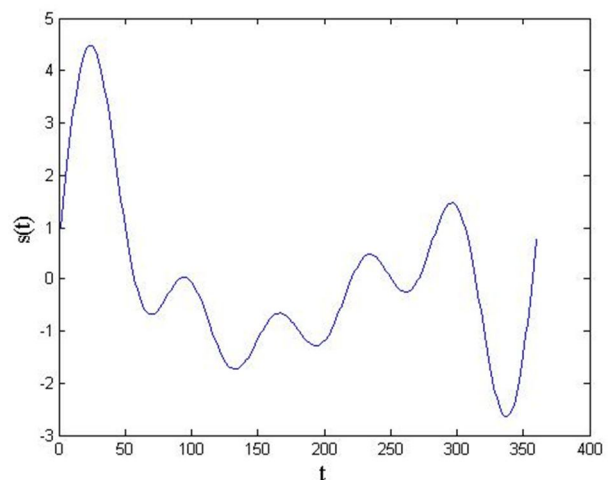


Рис. 2. Сигнал $s(t)$ з зміною початкової фази останньої гармоніки на 90°

Задачею дослідження полягає у знаходженні таких значень початкових фаз гармонічних складових сигналу $s(t)$, яке б давало мінімум значення пік-фактора суми гармонічних сигналів.

Для пошуку сигналу з прямокутним спектром і мінімальним пік-фактором спочатку розглянемо сигнал $s(t)$, який складається з двох гармонічних складових.

В загальному випадку формулу для визначення пік-фактора можна записати так [1, 2]:

$$pk_factor = \frac{\max S(t)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt}}, \quad (4)$$

де T – період сигналу, $\max s(t)$ – максимальне значення функції $s(t)$.

Сигнал $S(t)$ для двох гармонічних складових записується наступним виразом:

$$s(t) = \cos(\omega t) + \cos(2\omega t + \phi_{i1}), \quad (5)$$

де ω – кутова частота, ϕ_{i1} – зсув фаз відносно другої гармонічної складової сигналу $s(t)$.

Скористаємось методом перебору усіх можливих значень пік-фактора і з них виберемо найменший. Для цього першу гармоніку фіксуємо і починаємо змінювати фазу другої гармоніки ϕ_{i1} з кроком 1.

Графік зміни пік-фактора при зміні фазового зсуву функції $S(t)$ для двох гармонічних складових сигналу $s(t)$ представлений на Рис. 3.

З рисунку видно, що при фазових зсувах 90° та 270° ми спостерігаємо два мінімуми пік-фактора. Значення пік фактору в цих точках дорівнює 1.7576.

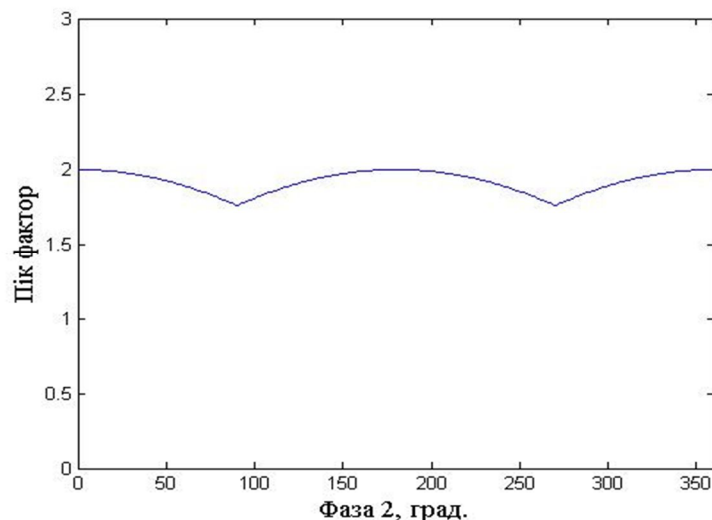


Рис. 3. Графік зміни пік-фактора при зміні фазового зсуву функції $s(t)$ для двох гармонічних складових

Розглянемо сигнал $s(t)$ який складається з трьох гармонічних складових. Такий сигнал записується у вигляді:

$$s(t) = \cos(\omega t) + \cos(2\omega t + \phi_{i1}) + \cos(3\omega t + \phi_{i2}), \quad (6)$$

де ϕ_{i1}, ϕ_{i2} – зсув фаз відповідно другої та третьої гармонічних складових сигналу $s(t)$.

При дослідженні сигналу $s(t)$, який складається з трьох гармонічних складових, зафіксуємо значення фазового зсуву другої гармоніки ϕ_{i1} і змінюємо фазовий зсув третьої гармоніки ϕ_{i2} з кроком 1° . Потім змінюємо фазу другої гармоніки і знову прокручуємо фазу

третьої гармоніки. Графік зміни пік-фактору сигналу $s(t)$ для трьох гармонічних складових представлений на Рис. 4.

Для пошуку значень фазових зсувів гармонічних складових, що відповідають мінімальному значенню пік-фактору сигналу $s(t)$ доцільно проводити роботу в автоматичному режимі за допомогою комп'ютерної програми, яка б працювала за алгоритмом повного перебору всіх значень фазових зсувів із заданим кроком. Такий алгоритм повинен в загальному складатись із встановлення початкових значень, якими є: початок діапазону, кінець діапазону, крок для зміни фазового зсуву гармонік сигналу $s(t)$. Алгоритм повинен мати декілька вкладених циклів, які відповідають кількості гармонік мінус одна, за фазовими зсувами яких буде відбуватись перебір. Останнім етапом алгоритму повинно бути знаходження мінімального пік-фактору сигналу $s(t)$ та запам'ятовування фазових зсувів, за яких пік-фактор був мінімальним.

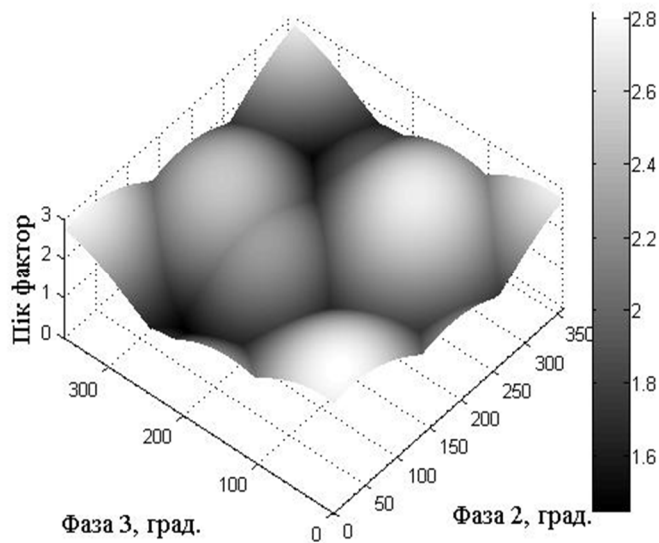


Рис. 4. Графік зміни пік-фактору при зміні фазового зсуву функції $s(t)$ для трьох гармонік

Алгоритм працює наступним чином. На початку алгоритму вводимо початкові значення, тобто діапазон, в якому будемо змінювати фазові зсуви сигналу $s(t)$. Наприклад, від 0 до π . Далі вводимо приріст по фазі (крок з який будуть змінюватись фазові зсуви сигналу $s(t)$).

Далі створюємо масив, в який будемо записувати значення пік-факторів сигналу $s(t)$. Починаємо заповнювати масив спочатку по одній координаті ϕ_{i1} , потім по другій – ϕ_{i2} . Ці цикли закінчуються з кінцевим значенням змінної l_2 . В циклі розраховуємо сигнал залежно від фазових зсувів, які задаються Z, i . Далі ми знаходимо максимальне значення сигналу $s(t)$. Потім знаходимо середньоквадратичне значення сигналу $s(t)$. Тоді знаходимо пік-фактор сигналу $s(t)$, як відношення максимального значення до середньоквадратичного. Далі записуємо значення пік-фактора в масив. Цикл повторюється доти, поки він не перебере всіх значень фазових зсувів ϕ_{i1}, ϕ_{i2} з заданим кроком. Далі виходимо з циклів для координати ϕ_{i1} та координати ϕ_{i2} .

Встановлено, що для сигналу $S(t)$ який складається з 3-х гармонічних складових, існує чотири точки, в яких пік-фактор мінімальний і складає 1,6173. Значення мінімумів пік-факторів зведені в Табл. 1.

Мінімуми пік-факторів сигналу $S(t)$, який складається з трьох гармонік Табл. 1

φ_{i2}°	φ_{i3}°	123,5°	236,5°
	16°	1,977	1,617
	164°	1,617	1,977
	196°	1,977	1,617
	344°	1,617	1,977

Не при всіх комбінаціях фазових зсувів спостерігається мінімальне значення пік-фактора сигналу. Так, для значень фазових зсувів $\varphi_{i2} = 16^\circ$, $\varphi_{i3} = 123,5^\circ$, $\varphi_{i2} = 164^\circ$, $\varphi_{i3} = 236,5^\circ$, $\varphi_{i2} = 196^\circ$, $\varphi_{i3} = 123,5^\circ$ та $\varphi_{i2} = 344^\circ$, $\varphi_{i3} = 236,5^\circ$ пік-фактор дорівнює 1,977. Розподіл пік-факторів на площині φ_{i2} , φ_{i3} представлено на Рис. 5.

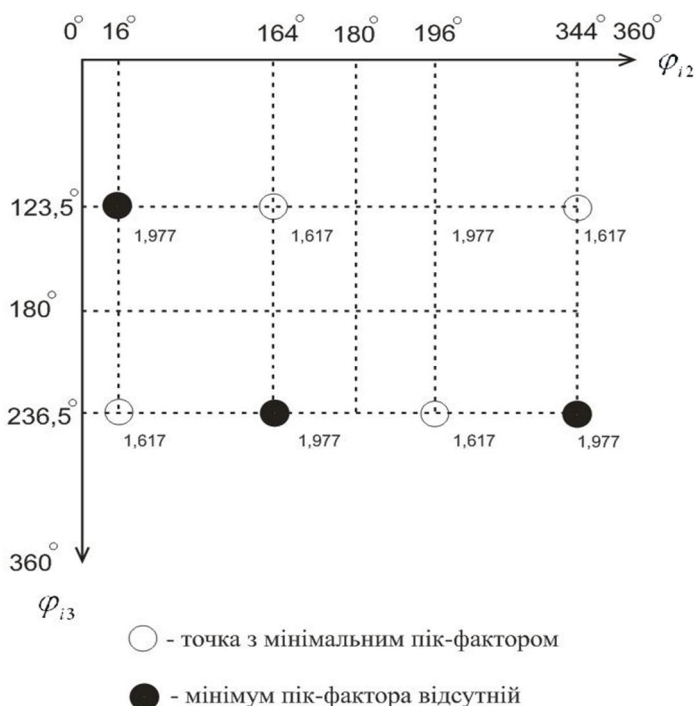


Рис. 5. Розподіл мінімальних значень пік-факторів на площині φ_{i2} , φ_{i3}

Мінімальні значення пік-факторів симетричні відносно точки з координатами $(180^\circ, 180^\circ)$.

Щоб переконатись, що ми дійсно знаходимося в мінімумі, було проведено дослідження з кроком 1° в околі точок, з мінімумами в яких пік-фактор мінімальний. В якості прикладу наведемо дві таблиці в околі точок з мінімальними пік-факторами (Табл. 2, Табл. 3.)

Мінімуми пік-факторів сигналу $S(t)$ з координатами

$\varphi_{i2} = 16^\circ$, $\varphi_{i3} = 236,5^\circ$ та $\varphi_{i2} = 196^\circ$, $\varphi_{i3} = 236,5^\circ$

Табл. 2

φ_{i2}°	φ_{i3}°		
	1,6351	1,6301	1,625
	1,622	1,6173	1,6237
	1,6246	1,626	1,6366

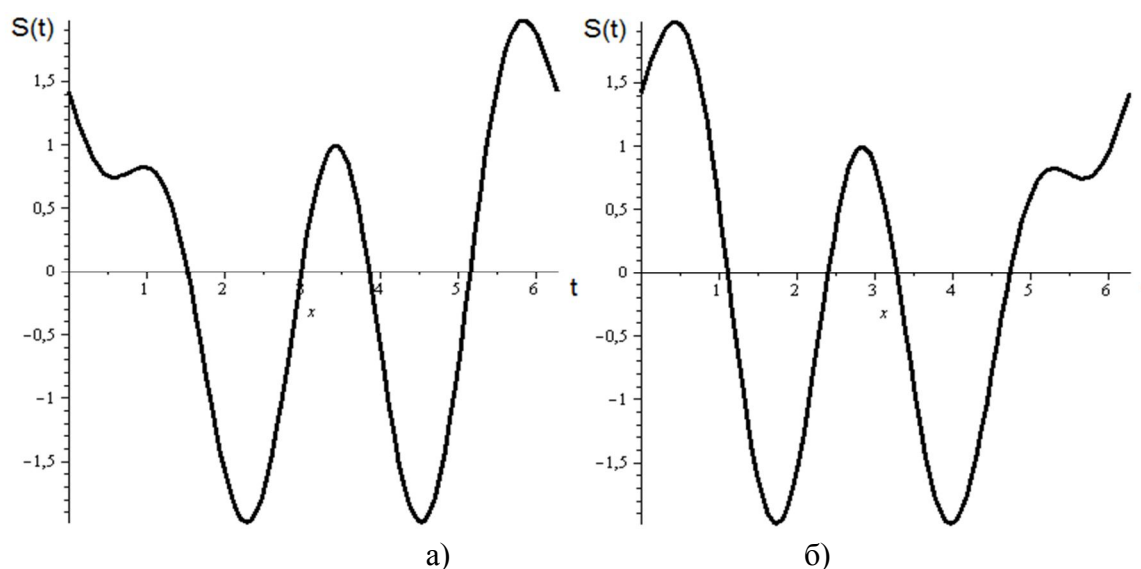
Мінімуми пік-факторів сигналу $S(t)$ з координатами

$$\phi_{i2} = 164^\circ, \phi_{i3} = 123,5^\circ \text{ та } \phi_{i2} = 344^\circ, \phi_{i3} = 123,5^\circ$$

Табл. 3

ϕ_{i2}°	ϕ_{i3}°		
		1,6366	1,626
	1,6237	1,6173	1,622
	1,625	1,6301	1,6351

Мінімальне значення пік-фактора сигналу $S(t)$ записане в центрі таблиці. При зміщенні на 1° в кожен бік значення пік-фактору зростає. Отже, ми дійсно знайшли мінімальне значення пік-фактору. Графіки сигналу $S(t)$ який складається з трьох гармонічних складових у точках, що відповідають мінімальному пік-фактору, представлені на Рис. 6.

Рис. 6. Сигнал $S(t)$ з мінімумом пік-фактора з координатами:

$$a) \phi_{i2} = 16^\circ, \phi_{i3} = 236,5^\circ, \text{ б) } \phi_{i2} = 196^\circ, \phi_{i3} = 236,5^\circ$$

Висновки. В результаті досліджень дістав подальшого розвитку метод знаходження математичної моделі радіосигналу з прямокутною обвідною спектру та мінімальним пік-фактором, який полягає у послідовному знаходженні значень початкових фаз гармонічних сигналів вздовж лінії мінімумів пік-факторів, при цьому перший сигнал є опорним. Метод дозволяє знаходити множину початкових фаз для довільної кількості гармонічних складових.

Література

1. Чечельницький В.Я. Пик-фактор многочастотных шумоподобных сигналов, кодированных эквивалентными классами совершенных двоичных решеток / В.Я. Чечельницький, А.В. Троянский // Труды Одесского политехнического университета. – 2005. – № 2. – С. 181-186.

2. Демьянов В.Ф. К минимизации максимального уклонения / В.Ф. Демьянов // ВестникЛГУ. – 1966. – № 7. – С. 21-28.
3. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – Москва : 1972. – 368 с.
4. Чеботарёв Н.Г. Собрание сочинений : в 2-х томах. Том 2 / Н. Г. Чеботарев ; отв. редактор Б. Н. Делоне. – Москва : – Ленинград: Издательство Академии Наук СССР, 1949. – 421 с.
5. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций / П.Л. Чебышев // Собр. соч. : т. 2. – Москва : Изд. АН СССР, 1947. – С. 151-238.
6. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр; пер. с англ. – 2-е изд. – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
7. Бураченко Д. Л. Общая теория связи : учебник для вузов войсковой связи / Д. Л. Бураченко, Г. Д. Заварин, Н. И. Ключев и др. ; под ред. Л. М. Финка. – Ленинград : Воен. Краснознам. акад. связи., 1970. – 411 с.

Автори статті

Любчик Віталій Романович – доктор технічних наук, доцент кафедри радіотехніки та зв'язку, Хмельницький національний університет. Тел. +380 (67) 930 54 39. E-mail: vitaly1612@gmail.com.

Сенчишина Юлія Володимирівна – аспірант кафедри радіотехніки та зв'язку, Хмельницький національний університет. Тел. +380 (97) 562 53 05. E-mail: senchyshyna.v@gmail.com.

Троцишин Іван Васильович – доктор технічних наук, професор кафедри теорії електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко, Одеська національна академія зв'язку імені О.С. Попова. Тел. +380 (97) 684 34 29. E-mail: vottp.tiv@gmail.com

Розорінов Георгій Миколайович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри систем захисту інформації, Державний університет телекомунікацій, м. Київ. Тел. +380 (63) 248 95 27. E-mail: grozoryn@gmail.com

Authors of the article

Liubchik Vitaliy Romanovych – sciences doctor (technic), associate professor of the radio engineering and communication department, Khmel'nitsky National University. Tel. +380 (67) 930 54 39. E-mail: vitaly1612@gmail.com.

Senchyshyna Yulia Volodymyrivna – postgraduate student of the radio engineering and communication department, Khmel'nitsky National University. Tel. +380 (97) 562 53 05. E-mail: senchyshyna.v@gmail.com

Trotsyshyn Ivan Vasylyovych – sciences doctor (technic), professor of A.G. Zyuko theory of electrical connection department, O.S. Popov Odessa National Academy of Telecommunications. Tel. +380 (97) 684 34 29. E-mail: vottp.tiv@gmail.com

Rozorinov Heorhiy Mykolayovych – sciences doctor (technic), professor, head of information security systems department, State University of Telecommunications, Kyiv. Tel. +380 (63) 248 95 27. E-mail: grozoryn@gmail.com

Дата надходження в редакцію: 16.12.2016 р.

Рецензент: д.т.н., проф. О. О. Скопа